

O exercício é só para provar ($\Rightarrow$)

($\Rightarrow$) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Suponha que } \{v_1, \dots, v_n\} \text{ é LI} \\ \text{HIPÓTESE. } \{v_1, \dots, v_n\} \text{ LI} \end{array} \right.$

Suponha que para $1 \leq k \leq n$

$$v \in [v_1, \dots, v_k] \cap [v_{k+1}, \dots, v_n]$$

Quero mostrar que $v = 0$. (TESE)

Demonstração

$$v \in [v_1, \dots, v_k] \Rightarrow \exists a_1, \dots, a_k \text{ tq}$$
$$v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$$

$$v \in [v_{k+1}, \dots, v_n] \Rightarrow \exists a_{k+1}, \dots, a_n$$

$$\text{tq } v = a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n$$

$$\text{Logo } v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n$$

$$\Leftrightarrow a_1 v_1 + \dots + a_k v_k - a_{k+1} v_{k+1} - \dots - a_n v_n = 0$$

$$\text{Como } \{v_1, \dots, v_n\} \text{ é LI} \Rightarrow$$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_{k+1} = \dots = a_n = 0$$

$$\text{Logo } v = 0 = 0 v_1 + \dots + 0 v_k.$$