PROPOSIÇÃO: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n e seja W um subespaço de V. Então W é finitamente gerado e $\dim W \leq n$. Se $\dim W = n$ então $W = V$.

Demonstração:

Se $W = \{0\}$, $W = [\phi]$ e não temos nada a fazer.

Suponha então que $W \neq \{0\}$. Seja $S \subset W$ tal que $W = [S]$. Então $S \neq \{0\}$ já que $W \neq \{0\}$. Então existe $w_1 \in S$, $w_1 \neq 0$. Como $w_1 \neq 0$, $\{w_1\}$ é LI. Logo S contém subconjuntos LI.

Seja $C \subset S$ um "maior" subconjunto LI de S. ("maior" é no sentido que: se $u \in S$ e $u \notin C$ então $\{u\} \cup C$ é LD)

Como C é LI e $\dim V = n$, então o número de vetores em C é $\leq n$, pois $C \subset V$ e todo subconjunto de V com mais do que n vetores é LD.

Vamos então provar que $[C] = W$,

Seja $u \in S$ tal que $u \notin W$. Então $\{u\} \cup C$ é LD e como C é LI, $u \in [C]$.

Sendo assim, $[S] \subset [C]$, ou seja $W \subset [C]$.

Logo $W = [C]$ e C é uma base de W.

(A ideia para conseguir o conjunto C é:

Seja $w_1 \in S$, $w_1 \neq 0$. Se $W = [w_1]$, acabou, $\{w_1\}$ é uma base de W.

Senão, existe $w_2 \in S$ tal que $w_2 \notin [w_1]$.

Assim $\{w_1, w_2\}$ é LI. Se $W = [w_1, w_2]$, acabou.

Se não, existe $w_3 \in S$ tq $w_3 \notin [w_1, w_2]$. Então $\{w_1, w_2, w_3\}$ é LI. Se $[w_1, w_2, w_3] = W$ acabou ...

E assim por diante, encontramos $\{w_1, \dots, w_r\} \subset S$ LI — o processo tem que parar após um número

finito de passos já que $W \subset V$ e $\dim V = n$.
Assim vamos achar $\{w_1, \dots, w_r\}$ LI tal que $\{w_1, \dots, w_r\} \cup \{u\}$ é LD, para $u \in S$, $u \neq w_i$, $i = 1, \dots, r$.
Logo $\{w_1, \dots, w_r\}$ é uma base de W e $r \leq n$.

Se $r = n$, então $\{w_1, \dots, w_n\}$ é um conjunto LI com n vetores e como $\dim V = n$, $\{w_1, \dots, w_n\}$ é uma base de V. Logo $W = V$.

Exemplos:

(1) Quais são todos os subespaços de $\mathbb{R}^3$?

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$

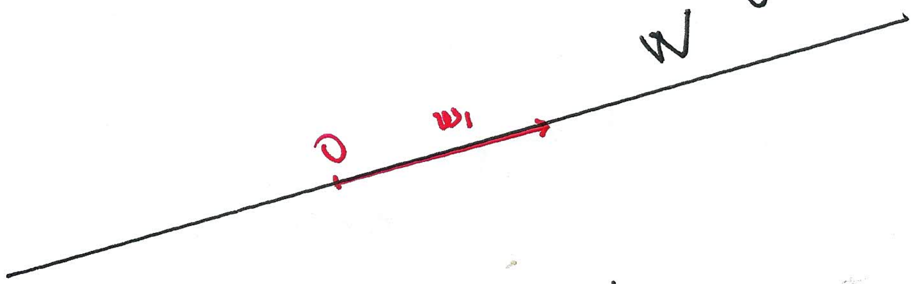
Se W é subespaço de $\mathbb{R}^3$, então $\dim W = 0, 1, 2$ ou 3.

Se $\dim W = 0 \Longrightarrow W = \{0\}$.

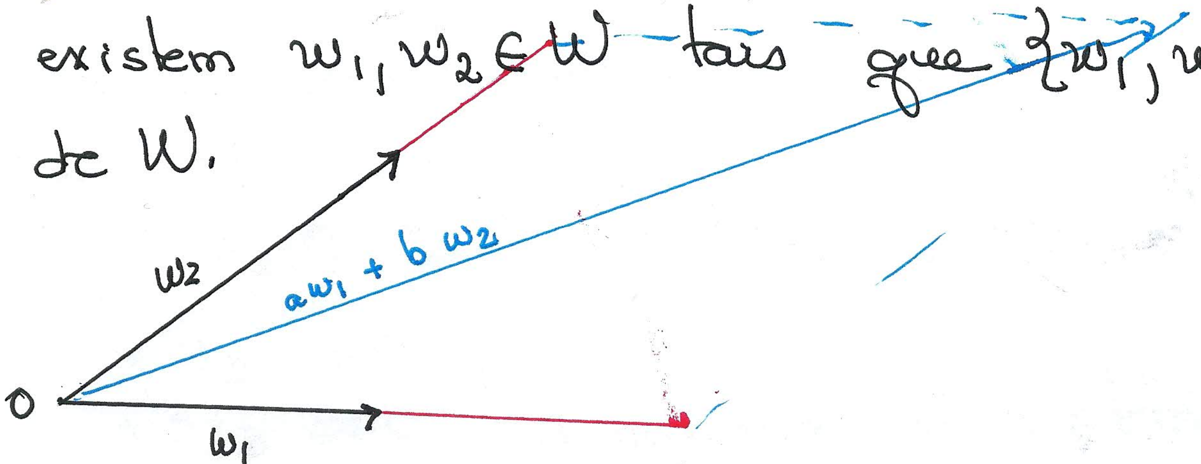
Se $\dim W = 1$, $\{w_1\}$ é uma base de W, $w_1 \in W$, $w_1 \neq 0$.

Assim, $W = \{a w_1 \mid a \in \mathbb{R}\}$.

W é uma reta que passa pela origem.



Se $\dim W = 2$, existem $w_1, w_2 \in W$ tais que $\{w_1, w_2\}$ é uma base de W.



$$W = \{a \cdot w_1 + b w_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

W é um plano que passa pela origem.

Se $\dim W = 3$ então $W = \mathbb{R}^3$.

(2) Seja $W \subset \mathbb{R}^4$, $W = [\underbrace{(1,1,0,0)}_{w_1}, \underbrace{(2,0,1,1)}_{w_2}, \underbrace{(1,3,-1,-1)}_{w_3}]$.

Determine uma base de W.

$S = \{w_1, w_2, w_3\}$ é um conjunto gerador de W.

Vamos extrair uma base de W contida em S.

Vamos analisar a equação vetorial

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 = 0$$

$$(x_1, x_1, 0, 0) + (2x_2, 0, x_2, x_2) + (x_3, 3x_3, -x_3, -x_3) = (0,0,0,0)$$

Logo
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad + 3x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$
. A matriz do sistema é

$$\begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L4 \leftrightarrow L4-L3]{L2 \leftrightarrow L2-L1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3+\frac{1}{2}L2]{-\frac{1}{2}L2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As colunas (1) e (2) têm pivôs na matriz escalonada.

Logo os vetores w_1 e w_2 são L I.

A terceira coluna da matriz escalonada é

$(1, -1, 0, 0) = (3, 0, 0, 0) - (2, 1, 0, 0)$

A mesma relação vale para w_1, w_2, w_3:

$w_3 = 3w_1 - w_2$. Então $w_3 \in [w_1, w_2]$.

Assim, $[w_1, w_2] = [w_1, w_2, w_3]$.

Logo $W = [w_1, w_2]$ e como $\{w_1, w_2\}$ é L I, é uma base de W.

$\dim W = 2$.

(3) Seja $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 = x_2 + x_3\}$

Achar uma base e a dimensão de W.

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in W$ se, e somente se

$$x_1 = -x_4 + x_2 + x_3$$

Assim, um vetor típico de W é da forma

$$(x_2 + x_3 - x_4,\ \underbrace{x_2,\ x_3,\ x_4}_{\text{variáveis livres}}) = x_2 (\underbrace{1, 1, 0, 0}_{w_1}) + x_3 (\underbrace{1, 0, 1, 0}_{w_2})$$

$$+ x_4 (\underbrace{-1, 0, 0, 1}_{w_3})$$

Logo $W = [w_1, w_2, w_3]$.

Note que $\{w_1, w_2, w_3\}$ é LI

$$\begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2 \leftrightarrow L2 - L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L3 \leftrightarrow L3 + L2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz escalonada tem um pivô em cada coluna.

Logo $\{w_1, w_2, w_3\}$ é LI.

Entenda a razão disso.

A equação vetorial

$$y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3 = 0$$

fornece o sistema

$$\left.\begin{aligned} y_1 + y_2 - y_3 &= 0 \\ y_2 &= 0 \\ y_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_1 = y_2 = y_3 = 0.$$

Logo $\{w_1, w_2, w_3\}$ é LI.

④ Seja W o subespaço de $P_3(\mathbb{R})$ gerado por

$$S = \{\underbrace{t^2 - 1}_{f_1}, \underbrace{t^3 - t^2 - 1}_{f_2}, \underbrace{t^3 + 4t - 2}_{f_3}, \underbrace{2t - 1}_{f_4}\}$$

Determine uma base de W.

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 = 0$$

→ polinômio nulo

$$(-x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4)\cdot 1 + (4x_3 + 2x_4)t + (x_1 - x_2)t^2 + (x_2 + x_3)t^3 = 0$$

Usando o Princípio de Igualdade de Polinômios obtemos o sistema

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L4 \leftrightarrow L2]{L3 \leftrightarrow L1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}L_4]{\substack{L3 \leftrightarrow L3+L1 \\ L3+L}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_3 \leftrightarrow \\ L3+2L2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L3 \leftrightarrow L4]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um pivô em cada coluna.

$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ é LI. Logo $\dim W = 4$ e $W = P_3(\mathbb{R})$.

O subespaço das soluções de um sistema linear homogêneo.

Considere o sistema de m equações e n incógnitas

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \ldots, x_n) \text{ é sol. de } (*)\}$$

Verifique que

W é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

AFIRMAÇÃO: $\dim W$ = nº de variáveis livres

= nº de incógnitas − (nº de pivôs na matriz escalonada do sistema)

Exemplo

matriz escalonada de um sistema de 5 equações e 6 incógnitas

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 pivôs variáveis livres

$6 - 4 = 2$

soluções do sistema

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ tais que

$$\begin{cases} x_6 = 0 \\ x_5 + 2x_6 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 0 \end{cases}$$

$x_6 = 0 \Rightarrow x_5 = 0$

$\Rightarrow x_3 = -2x_4$

$\Rightarrow x_2 = -x_3 = 2x_4$

x_1 é qualquer

$(x_1, 2x_4, -2x_4, x_4, 0, 0) =$

$x_1(1, 0, 0, 0, 0, 0) + x_4(0, 2, -2, 1, 0, 0)$

$W = [(1,0,0,0,0,0), (0,2,-2,1,0,0)]$

Lista 3

Exercício 1.

(g) $V = \mathbb{R}^4$ $\quad W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_4 = x_1 + x_2 \text{ e } x_3 = x_1 - x_2\}$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in W \iff x_3 = x_1 - x_2 \text{ e } x_4 = x_1 + x_2$

$(x_1, x_2, x_1 - x_2, x_1 + x_2) = x_1(1, 0, 1, 1) + x_2(0, 1, -1, 1)\}$

$W = [(1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1)]$

Note que W é o espaço das soluções de

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad\quad - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 \quad\quad &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4 incógnitas
2 pivôs
$\dim W = 4 - 2$

Se acharmos 2 vetores LI em W já sabemos que é uma base de W.

Lista 3

1 (i)

$V = M_3(\mathbb{R})$

W = subespaço das matrizes tais que a primeira linha é igual à terceira

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ com $a_{11} = a_{31}$, $a_{12} = a_{32}$, $a_{13} = a_{33}$

Podemos fazer
$a_{11} = a_{31} = a$
$a_{12} = a_{32} = b$
$a_{13} = a_{33} = c$
$a_{21} = r$ $a_{22} = s$ $a_{33} = t$

$$\underset{W}{\underset{\cap}{A}} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ a & b & c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ r\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma base de $W = \{ E_{11} + E_{31},\ E_{12} + E_{32},\ E_{13} + E_{33},\ E_{21},\ E_{22},\ E_{23} \}$

6. Verdadeiro ou Falso?

(a) Se $A \subset B$ e B é LI, então A é LI.

Suponha que $A = \{v_1, \dots, v_k\}$
$B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m\}$

Se $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$, provar que $a_1 = \dots = a_k = 0$.

Se $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$, então

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k + 0 v_{k+1} + \dots + 0 v_m = 0.$$

Como B é LI, $a_1 = \dots = a_k = 0$.

VERDADEIRA

(b) FALSA

Para mostrar que é falsa, exiba um exemplo.

$A = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ é LI

$$A \subset \{\underbrace{(1,0,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{v_2}, \underbrace{(1,1,0)}_{v_3}\} = B$$

B é LD pois $v_1 + v_2 + (-1) v_3 = 0$.

6 (c) Se $\dim V = n$, então V pode ter um conjunto gerador com $n-1$ vetores.

FALSA

De um conjunto de geradores de V podemos extrair uma base de V. Mas se o conjunto tem $n-1$ vetores, a base contida nesse conjunto teria um número $\leq n-1$ de vetores. ABSURDO, pois se $\dim V = n$, todas as bases de V têm n vetores.

(d) FALSA

Se $\dim V = n$ então todo subconjunto de V com mais do que n vetores é LD.

(e) Verdadeira

$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V

$B \cup \{v\}$, $v \in V$, $v \notin B$ gera V, pois $v \in [B]$ e então

$$[B \cup \{v\}] = [B] = V.$$