EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM 1 E 2 - APLICAçÕES

# 1. Modelos de crescimento populacional

1.1. **Modelo de crescimento exponencial.** Se $P(t)$ denota o tamanho de uma população no instante $t$, no modelo mais simples da evolução de $P$ supõe-se que a taxa de crescimento depende apenas do número de indivíduos em cada instante (e não, por exemplo, de fatores ambientais e ou sazonais). a equação obtida é então:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda(P)P. \tag{1}$$

No caso mais simples, $\lambda(P) = \lambda$ é constante e o crescimento da população é exponencial:

$$P(t) = P_0 e^{\lambda(t-t_0)},$$

sendo $P_0 = P(t_0)$ a população no instante inicial $t_0$.

1.2. **Modelo logístico.** Um modelo um pouco mais realíistico para o crescimento de populações supõe-se que o ambiente pode suportar apenas uma quantidade finita $K$ (chamada então a *capacidade de suporte* do meio.). Nesse caso, devemos ter $\lambda(P) = 0$ e, supondo $\lambda(0) = r$, no modelo mais simples que atende essas condições devemos ter $\lambda(P) = (r - r/KP)$ Escrevendo $a = r$ e $r/K = b$ para simplificar a notação, temos a equação:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP). \tag{2}$$

Este modelo, proposto pelo matemático belga P.P. Verhulst por volta de 1840, é denominada a *equação logística.*

*Date*: May 8, 2020.

A equação (2) tem variáveis separáveis.

$$\frac{dP}{P(a-bP)} = dt \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1/a}{P} + \frac{b/a}{a-bP}\right) d\,P = d\,t \Leftrightarrow$$

$$(1/a)\log|P| - (1/a)\log|a-bP| = dt + C_1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{P}{a-bP} = C_3 e^{at} \Leftrightarrow \tag{3}$$

$$(1 + bC_3 e^{-at})P = C_3 a e^{at} \Leftrightarrow$$

$$P = \frac{C_3 a e^{at}}{(1 + bC_3 e^{at})} \Leftrightarrow$$

$$P = \frac{C_3 a}{(e^{-at} + bC_3)}. \tag{4}$$

Tomando $t = t_0$ em (3) obtemos: $C_3 = \dfrac{P_0}{a - bP_0} e^{-at_0}$ e de (4):

$$P(t) = \frac{a}{(a/P_0 - b)e^{-a(t-t_0)} + b}.$$

O gráfico de $P$ é chamado a *curva logística.*

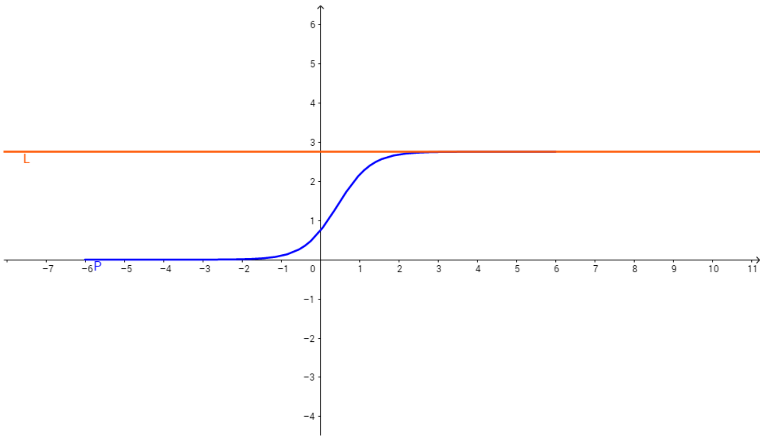


FIGURE 1. curva logística

## 2. O oscilador harmônico

O oscilador harmônico é o modelo matemático para um movimento retilíneo de uma partícula, sujeita a uma força atratora para a origem, com magnitude proporcional à distância ò origem.

Se $m$ designa a massa da partícula e $x$ sua posição, segue da lei de Newton que

$$m\ddot{x} + kx = 0. \tag{5}$$

que é a equação do *oscilador harmônico simples.*

Se uma força de resistência, proporcional à velocidade, for acrescentada, a equação se torna:

$$m\ddot{x} + kx + \mu\dot{x} = 0. \tag{6}$$

que é a equação do *oscilador harmônico amortecido.*

Finalmente, se uma força externa $F$ dependente apenas do tempo e não da posição e velocidade atua sobre a partícula a equação fica:

$$m\ddot{x} + kx + \mu\dot{x} = F(t). \tag{7}$$

que é a equação do *oscilador harmônico amortecido e forçado.*

**Exemplo 1.** *Suponhamos que um corpo de massa $m$ é suspenso por uma mola (idealizada com massa $0$). Antes da colocação do* *peso,a mola tem comprimento $l$ Na posição de equilíbrio o comprimento da mola é igual a $l + s$. Nessa posição, a força restauradora exercida pela mola (dada pela Lei de Hooke), compensa exatamente a força de gravidade, ou seja: $mg = ks$. Se $l + s + x$ é a posição da mola em um dado instante, temos pela $2^a$ Lei de Newton: $m(l + \ddot{s} + x) = -k(s+x)+mg$.. Como $m(d + \ddot{s} + x =)\ddot{x}$ e $mg = ks$, obtemos $m\ddot{x} = -k(s + x) + mg = -kx - ks + mg = -kx$. ou seja:*

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

*que é a equação do oscilador harmônico simples.*

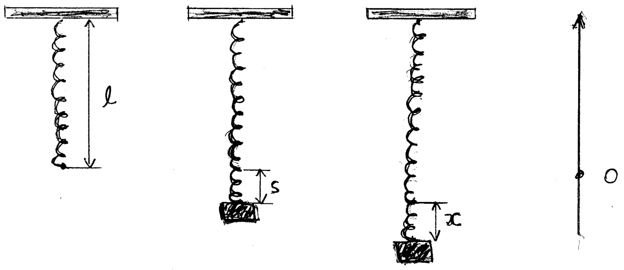


FIGURE 2. sistema massa-mola

**Exemplo 2.** *Supondo agora que o movimento se dá em um meio fluido que opõe uma força resistiva proporcional à velocidade, a equação se torna:* $m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x}$, *ou*

$$m\ddot{x} + kx + \mu\dot{x} = 0,$$

*que é a equação do oscilador harmônico amortecido.*

**Exemplo 3.** *Finalmente, se uma força externa, por exemplo, um movimento oscilatório na base de sustentação, age sobre a base da mola, temos uma equação do tipo:*

$$m\ddot{x} + kx + \mu\dot{x} = F(t),$$

*que é a equação do oscilador harmônico amortecido e forçado.*

**Solução da equação do oscilador harmônico simples**
Por conveniência, escrevemos a equação (5) na forma: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, sendo $\omega^2 = k/m$.

Temos uma equação linear de segunda ordem a coeficientes constantes e homogênea. A equação característica é: $x^2 + w^2 = 0$ cujas raízes são $\omega i$ e $-\omega i$.

A solução geral da equação éportanto:

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \mathrm{sen}\, \omega t,$$

É conveniente escrever a equação na forma:

$$x(t) = A \cos(wt - \phi) \tag{8}$$

Desenvolvendo a expressando e igualando ‘a anterior, obtemos:

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \cos \phi = \frac{c_1}{A}, \mathrm{sen}\, \phi = \frac{c_2}{A}.$$

As constantes $c_1$ e $c_2$ são determinadas pelas condições iniciais. se $x(0) = x_0$ e $\dot{x_0} = v_0$, obtemos $c_1 = x_0$ e $c_2 = \frac{v_0}{\omega}$ e, portanto:

$$A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2}, \quad \cos \phi = \frac{x_0}{A}, \mathrm{sen}\, \phi = \frac{v_0}{wA}.$$

Portanto, temos um movimento oscilatório em torno da posição central $x = 0$. O afastamento máximo da posição central é a *amplitude* $A$. O *período* do movimento, ou seja, o tempo necessário para uma oscilação completa é$T = \frac{2\pi}{\omega}$ e seu inverso, o número de oscilações por unidade de tempo éa *frequência* $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

Derivando (8), obtemos a velocidade $v(t) = \dot{x}(t)$;

(9) $$v(t) = -A\omega \text{sen}\,(wt - \phi)$$

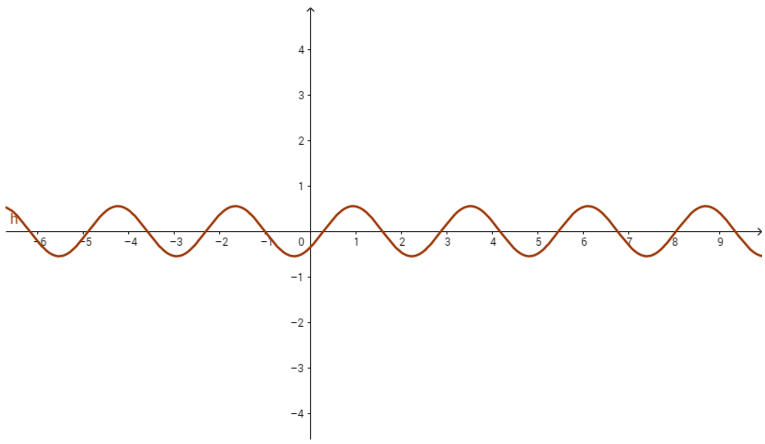


FIGURE 3. movimento harmônico simples

**Solução da equação do oscilador harmônico com amortecimento** Por conveniência, escrevemos a equação (6) na forma: $\ddot{x} + 2\nu\dot{x} + \omega^2 x = 0$, sendo $\omega^2 = k/m$ e $\nu = \mu/2m$.

A equação característica agora é: $x^2 + 2\nu x + \omega^2 = 0$, que tem discriminante $\Delta = 4\nu^2 - 4\omega^2 = \frac{\mu^2 - 4km}{m^2}$. Temos então 3 casos a analisar

**Amortecimento forte:** $(\mu^2 > 4km \Leftrightarrow \nu > \omega)$. Neste caso, temos duas raízes reais negativas $-\nu \pm \iota$, sendo $\iota = \sqrt{\nu^2 - \omega^2}$.

A solução geral da equação éportanto:

$$x(t) = e^{-\nu t}\left(c_1 e^{\iota t} + c_2 e^{-\iota t}\right),$$

Como $\nu > \iota$, temos $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

**Amortecimento crítico:** $(\mu^2 = 4km \Leftrightarrow \nu = \omega)$. Neste caso, $-\nu$ é raiz real negativa dupla

A solução geral da equação éportanto:

$$x(t) = e^{-\nu t}\left(c_1 + c_2 t\right),$$

Novamente, temos $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

**Amortecimento oscilatório :** $(\mu^2 < 4km \Leftrightarrow \nu < \omega)$. Neste caso, Neste caso, temos duas raízes complexas conjugadas $-\nu \pm i\iota$, sendo $\iota = \sqrt{\nu^2 - \omega^2}$. A solução geral da equação éportanto:

$$x(t) = e^{-\nu t}\left(c_1 \cos \iota t + c_2 \mathrm{sen}\, \iota t\right),$$

Novamente, temos $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, mas agora a solução se aproxima do zero ‘oscilando.

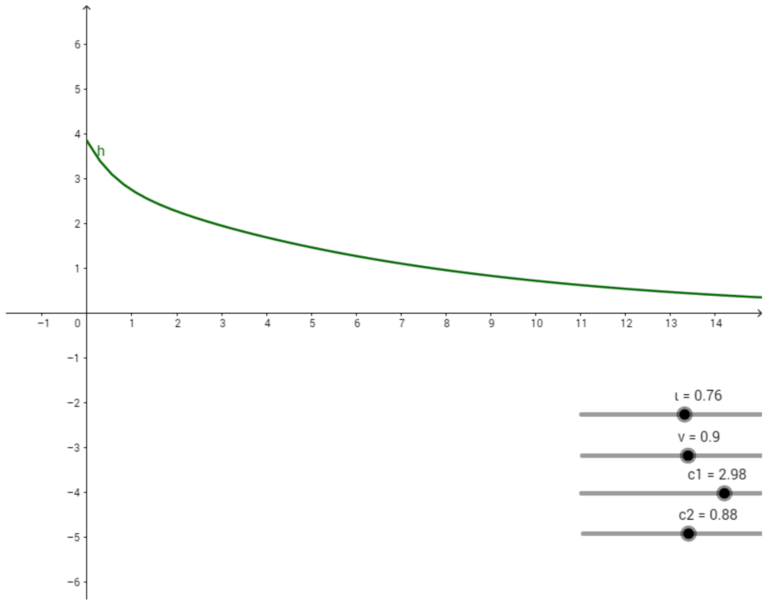


FIGURE 4. movimento harmônico amortecido forte

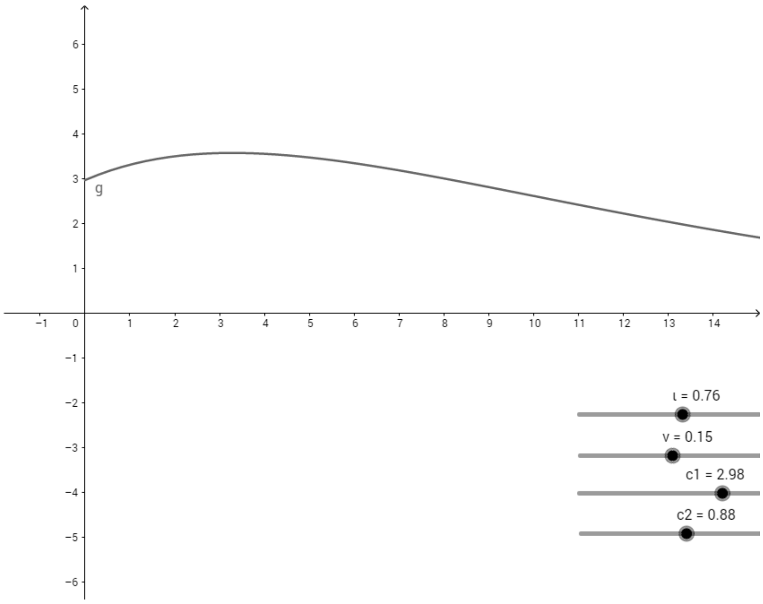


FIGURE 5. movimento harmônico amortecido critico

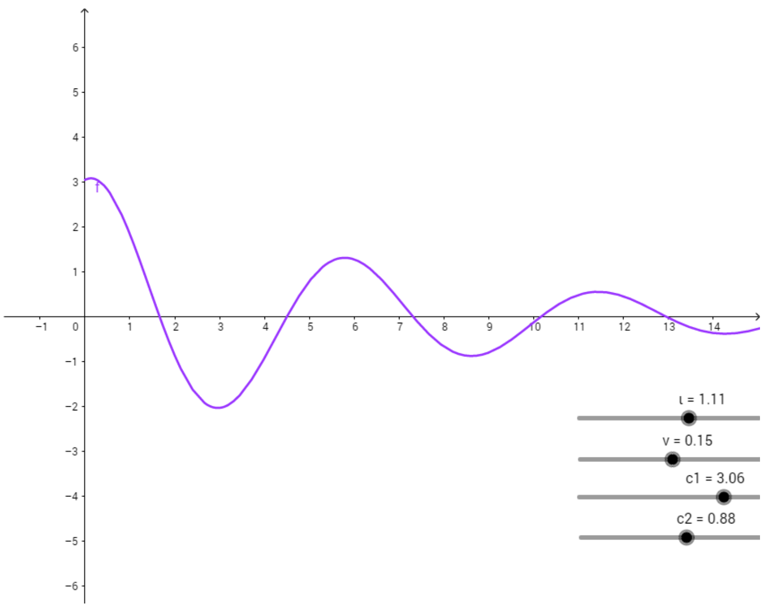


FIGURE 6. movimento harmônico amortecido oscilatorio

## 3. Exemplos levando a sistemas de equações

3.1. **Circuitos RLC.** Um circuito RLC (também conhecido como circuito ressonante ou circuito aceitador) é um circuito elétrico consistindo de um resistor ($R$), um indutor ($L$), e um capacitor ($C$), conectados em série ou em paralelo.

A corrente ($I$) é medida em amperes, a resistência em ohms, a indutância em henrys e a capacitância em farads. A tensão ($V$) é medida em volts.

O fluxo de corrente no circuito é governado pelas *Leis de Kirchoff*:

(i) A soma das correntes entrando em cada nó do circuito é nula.
(ii) A soma das quedas de tensão em cada circuito fechado é igual à tensão aplicada.

e pelas propriedades dos elementos do circuito:

iii) A queda de tensão no resistor é $IR$.
(iv) No capacitor vale a equação $C\frac{dV}{dt} = I$.
(v) No indutor vale a equação $L\frac{dI}{dt} = V$.

Consideremos, por exemplo, o circuito em paralelo esquematizado abaixo, no qual a tensão aplicada é nula e o sentido da corrente foi atribuído arbitrariamente.

De (iv) e (v), obtemos as equações no capacitor e no indutor:

$$C\frac{dV_1}{dt} = I_1 \tag{10}$$

$$L\frac{dI_3}{dt} = V_3. \tag{11}$$

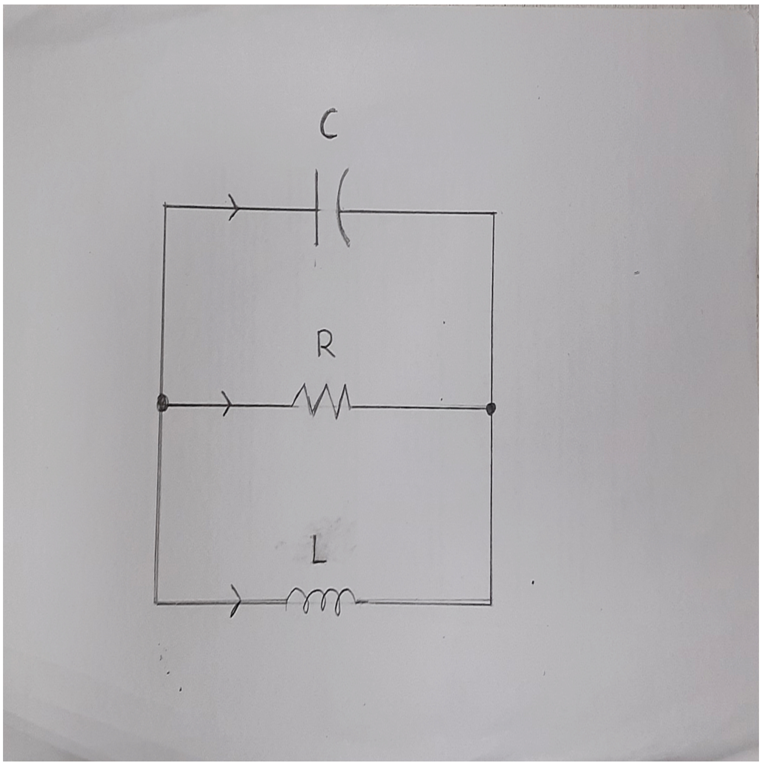


FIGURE 7. circuito RCL em paralelo

Da $1^a$ e $2^a$ lei de Kirchoff (i) e (ii) , obtemos respectivamente

$$I_1 + I_2 + I3 = 0 \tag{12}$$

$$V_1 - V_2 = 0$$

$$V_1 - V_3 = 0$$

$$V_2 - V_3 = 0 \tag{13}$$

Finalmente de (iii), obtemos

$$V_2 = I_2 R. \tag{14}$$

Usando as equações (12), (13), (14) podemos escrever $I_1, I_2, V_2$ e $V_3$ em função de $I_3$ e $V_1$.

em particular : $I_1 = -I_2 - I_3 = -V_2/R - I_3 = -V_1/R - I_3$ e e $V_3 = V_1$.

De (10) e (11), obtemos então o sistema:

$$\frac{dV_1}{dt} = -\frac{V_1}{RC} - \frac{I_3}{C}$$
$$\frac{dI_3}{dt} = -\frac{V_1}{L}.$$

nas incógnitas $V_1$ e $I_3$. Resolvido este, podemos determinar os valores das correntes e quedas de tensão nos outros pontos do circuito.

**Exemplo 4.** *Mostre que as equações para a corrente $I$ através do indutor e a diferença de tensão $V$ através do capacitor no circuito esquematizado abaixo satisfazem o sistema de equações:*

$$\frac{dV}{dt} = 2I - V$$
$$\frac{dI}{dt} = I - V.$$

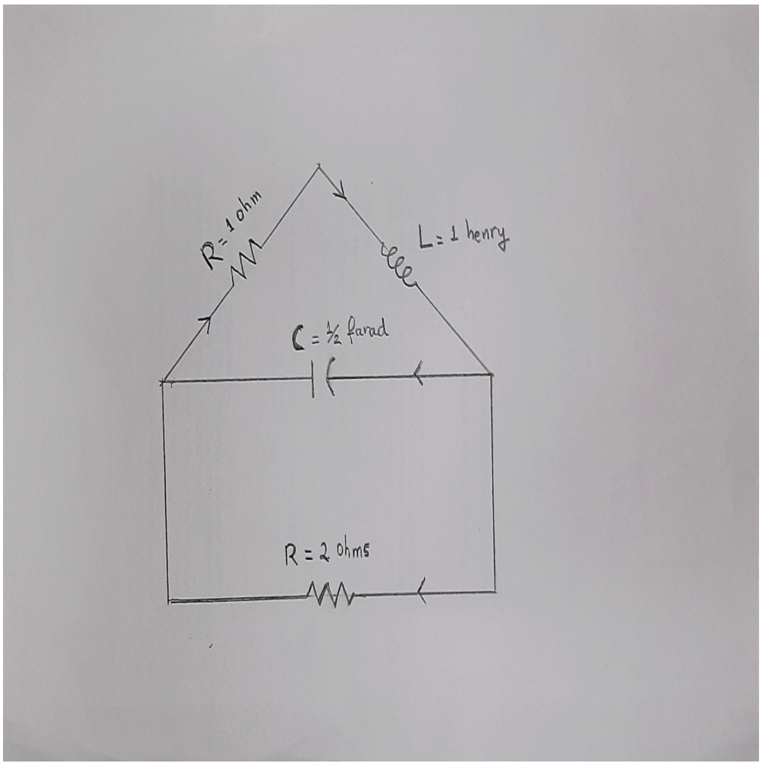


FIGURE 8. circuito RCL

3.2. **Predador presa.** Um problema importante em ecologia é o da evolução da população de um predador, denotado aqui por $P(t)$ e de uma presa, denotado por $H(t)$. Em 1925, Lotka e Volterra propuseram um modelo matemático, mostrando como um equilíbrio ecológico pode ser mantido na interação entre duas espécies desse tipo.

Nesse modelo supõe-se uma taxa fixa de natalidade $a_1H$, para a população de presas e uma taxa de mortalidade $a_2P$ para a popula cão de predadores. Assim, na ausência de interação a primeira cresceria e a segunda decairia exponencialmente. Entretanto, como o contato tende a ser favorável para os predadores e desfavorável para as presas, eles postularam taxa de crescimento e decrescimento, respectivamente, ambas proporcionais ao número de encontros $HP$, obtendo o sistema de equações diferenciais *não lineares*:

$$\frac{d\,H}{d\,t} = a_1 H - b_1 H P$$
$$\frac{d\,P}{d\,t} = -a_2 P + b_2 H P$$

Observe-se que se $P = \frac{a_1}{b_1}$ e $H = \frac{a_2}{b_2}$, então as taxas de crescimento de ambas as espécies é nula, ou seja *elas estão em equilíbrio ecológico*.

3.3. **Propagação de epidemias.** No modelo básico para a dinâmica de uma epidemia (por exemplo a atual epidemia de covid19), supõe-se que a propagação é bem mais rápida que a taxa de natalidade ou morte das populações envolvidas que podem, portanto, ser omitidas. O famoso modelo SIR, proposto por W. O. Kermack e A. G. Mc Kendrick em 1927, baseia-se então na divisão da população em três compartimentos: $S$, a população *suscetível*, isto é, ainda não infectada, $I$ a parte *infectada* e doente e $R$ a parte *recuperada* (ou falecida) e consiste no seguinte sistema *não linear* de equações:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta I S}{N},$$
$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta I S}{N} - \gamma I,$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I,$$

sendo $N = I + S + R$ a população total (suposta constante).

Pode ser mostrado que a dinâmica da epidemia depende da razão: $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$, denominado *taxa básica de reprodução*, que mede o número esperado de novas infeções a partir de um único infectado em uma população suscetível.