TEORIA DOS CONJUNTOS - LISTA 4

1. Mostre que não existe z tal que $x \subsetneq z \subsetneq S(x)$.

2. (a) Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que não existe $k \in n$ tal que $n < k < n + 1$.
(b) Use item (a) para mostrar que para todo $m, n \in \mathbb{N}$ temos: se $m < n$, então $m + 1 \leq n$. Conclua que $m < n$ implica $m + 1 < n + 1$.
(c) Usando (b), dê um exemplo de uma função injetora $f : \mathbb{N} \longrightarrow Y$, onde Y é um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$ (ou seja $Y \subsetneq \mathbb{N}$).

3. Mostre que $m = n$ se, e somente se, $S(m) = S(n)$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

4. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, então existe um único $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = k + 1$.

5. Mostre que para todo $m, n \in \mathbb{N}$ temos que $m < n$ se e somente se $m \subset n$ e $m \neq n$.

6. Seja $P(x)$ um propriedade. Assuma $k \in \mathbb{N}$ e que
(a) $P(k)$ vale e que
(b) para todo $n \geq k$, se $P(n)$ vale, então $P(n+1)$ também vale. Mostre que $P(n)$ vale para todo $n \geq k$.

7. Mostre, usando indução, que todo elemento de um número natural é um número natural. Conclua que $n = \{m \in \mathbb{N} : m < n\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

8. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \neq 0$ e $n \neq 1$, então existe um único $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = (k + 1) + 1$.

9. Mostre que se $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ e A é limitado superiormente (ou seja $\exists b \in \mathbb{N}$ tal que $n < b \ \forall n \in A$), então A tem maior elemento.(Dica: Use o Princípio da Boa Ordem para mostrar que tem supremo e o exercício 4 para mostrar que esse supremo está em A.)

10. Mostre que não existe uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $f(n) > f(n + 1)$ (ou seja, não existe uma sequência infinita estritamente decrescente de números naturais).

11. Defina em $\mathbb{Z}$ a seguinte relação: $[(a, b)]R[(c, d)]$ se e somente se $a + d \leq b + c$ (onde $\leq$ é a ordem usual nos naturais). Mostre que esta relação está bem definida (ou seja, que não depende da escolha do representante da classe) e que é uma ordem total em $\mathbb{Z}$.

12. (a) Mostre que para todo racional $[\frac{a}{b}] \in \mathbb{Q}$, existe $c, d \in \mathbb{Z}$ tal que $d > 0$ e $[\frac{a}{b}] = [\frac{c}{d}]$.
(b) Para $b > 0$ e $d > 0$, defina $[\frac{a}{b}]R[\frac{c}{d}]$ se e somente se $ad \leq bc$ (aqui $\leq$ é a relação de ordem em $\mathbb{Z}$ usual, ou seja, a definida no exercício anterior). Mostre que R está bem definida e que é uma ordem total em $\mathbb{Q}$.

Exercício extra. Usando o que foi feito em aula, verifique que valem os axiomas de Peano, listados abaixo. Sejam m e n números naturais.
(P1) Se $S(n) = S(m)$, então $n = m$.
(P2) $S(n) \neq 0$.
(P3) $n + 0 = n$.

(P4) $n + S(m) = S(n + m)$.
(P5) $n \cdot 0 = 0$.
(P6) $n \cdot S(m) = (n \cdot m) + n$.
(P7) Se $n \neq 0$, então $n = S(k)$ para algum k.
(P8) Esquema da Indução: seja A uma propriedade aritmética. Se 0 tem a propriedade A e se $A(k)$ implica $A(S(k))$ para todo k, então todo número (natural) tem a propriedade A.