EXERCÍCIOS DOS TEXTOS 8 E 9 - NÚMEROS NATURAIS

1. Mostre que, para qualquer conjunto x, $x \subset S(x)$ e não existe nennhum conjunto z tal que $x \subsetneq z \subsetneq S(x)$.

2. Mostre que $J = \bigcap\{I : I$ é um conjunto indutivo $\}$ é um conjunto indutivo e que é o menor indutivo com relação a inclusão (ou seja se I é um conjunto indutivo, então $J \subset I$). *Obs*: Com isso estamos mostrando que definir $\mathbb{N} = \bigcap\{I : I$ é um conjunto indutivo $\}$ é equivalente à definição dada no texto.

3. Mostre que $0 < n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n = 0$ ou $n = k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

5. Mostre o princípio da indução (segunda versão): Seja $P(x)$ uma propriedade (possivelmente com parâmetros). Suponha que, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\text{se } P(k) \text{ vale para todo } k < n, \text{ então } P(n).$$

Então $P(n)$ vale para todo número natural n.

6. *(a)* Seja $<$ uma ordem estrita em um conjunto A e $b \notin A$. Defina a relação $\prec$ em $B = A \cup \{b\}$ da seguinte forma:

$$x \prec y \text{ se e somente se } (x, y \in A \text{ e } x < y) \text{ ou } (x \in A \text{ e } y = b)$$

Mostre que $\prec$ é uma ordem estrita em B e que $\prec \cap A^2 = <$. (Intuitivamente, $\prec$ mantém a ordem $<$ em A e coloca b como sendo maior que todo elemento de A.)
(b) Aplique o item (a) tomando $A = \mathbb{N}$ e $b = \mathbb{N}$. Mostre que $\prec$ define uma boa ordem em $B = \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$. Observe que $x \prec y$ se e somente se $x \in y$, para todo $x, y \in B$.