

Mauro Rodrigues
Departamento de Economia – FEA/USP

1. (Lucas, 1988) O tempo é contínuo e indexado por $t \in [0, \infty)$. Existe um contínuo de agentes idênticos, distribuídos uniformemente no intervalo $[0, 1]$. Não há crescimento populacional. As preferências são dadas por:

$$U = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} dt, \quad 0 < \rho < 1$$

Cada agente possui 1 unidade de tempo por período, a qual pode ser usada para trabalho ou para acumular capital humano (estudo). Não há capital físico, de modo que toda a renda do trabalho é consumida. A restrição orçamentária é portanto:

$$c_t = w_t n_t h_t$$

Em que h_t é o estoque de capital humano; w_t é o salário por unidade de capital humano; n_t e $1 - n_t$ são o número de horas trabalhadas e horas de estudo respectivamente. A lei de movimento do capital humano é:

$$\dot{h}_t = (1 - n_t)H_t$$

Em que H_t é o estoque **agregado** de capital humano da economia. A restrição de recursos é dada por:

$$c_t = F(n_t h_t) = z n_t h_t$$

Em que z é constante. Além disso, $h_0 > 0$ é dado.

- (a) Formule e resolva o problema do agente representativo.

A produção é gerada por uma firma competitiva, utilizando somente trabalho como insumo, por meio da tecnologia $F(N_t) = zN_t$.

- (b) Formule e resolva o problema da firma.

Em equilíbrio, $h_t = H_t$ e $N_t = n_th_t$. Assuma que a economia encontre-se em uma trajetória de crescimento balanceado.

- (c) Encontre a taxa de crescimento de equilíbrio desta economia.
- (d) Formule e resolva o problema do planejador central nesta economia. Qual é a taxa de crescimento resultante?

(Dica: o planejador central internaliza o fato de que $h_t = H_t$)

- (e) Compare as taxas de crescimento obtidas em (c) e (d). Interprete intuitivamente a diferença entre elas.

Retorne agora ao problema descentralizado, e suponha que o governo pague ao agente uma fração ϕ da renda que ele ganharia caso utilizasse seu tempo de estudo para trabalho. Ou seja, para cada hora de estudo, o indivíduo recebe $\phi w_t h_t$, de modo que a restrição orçamentária se torne:

$$c_t = w_t n_t h_t + \phi w_t h_t (1 - n_t) - T_t$$

Em que T_t é um imposto lump-sum que completamente financia o subsídio ao estudo, isto é, em equilíbrio $T_t = \phi w_t H_t (1 - n_t)$.

- (f) Refaça a parte (a) levando isso em conta. Calcule o valor de ϕ que faz com que a solução de mercado torne-se eficiente.

Ex1. Extra. (Lucas, 1988)

a) O problema do agente representativo é dado por:

$$\max_{C_t, t \in [0, \infty)} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{C_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} dt$$

subject to:

$$\begin{cases} C_t = w_t n_t h_t \\ h_t = (1 - n_t) H_t \end{cases}$$

com $h_0 > 0$ dado

Hamiltoniano para o problema é dado por

$$H = e^{-\rho t} \cdot \frac{C_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \mu \cdot \{ (1 - n_t) H_t \}$$

Uma vez escolhido n_t , dado h_t , C_t está fixado, podemos trabalhar com um controle, n_t , e um estado apenas.

Substituindo $C_t = w_t n_t h_t$: 1)

$$H_t = e^{-\rho t} \cdot \frac{(w_t n_t h_t)^{1-\rho} - 1}{1-\rho} + \mu(1-n_t) H_t$$

$$H_m = 0 \rightarrow (1) e^{-\rho t} \cdot (w_t n_t h_t)^{-\rho} \cdot w_t h_t - \mu H_t = 0$$

$$H_n = -\dot{\mu} \rightarrow (2) e^{-\rho t} \cdot (w_t n_t h_t)^{-\rho} \cdot w_t n_t = -\dot{\mu}$$

b) O problema da firma é dado por

$$\max_{N_t} Z N_t - w_t N_t$$

A condição compatível com produto peritico, em equilíbrio, é dada por $\boxed{Z = w_t}$

c) Voltando as duas equações do problema do indivíduo, (1) e (2), dividindo termo a termo (2) por (1):

$$\frac{-\dot{\mu}}{\mu H_t} = \frac{n_t}{h_t}$$

Em equilíbrio, $H_t = h_t$, logo:

$$-\frac{\dot{\mu}}{\mu} = n_t$$

Aplicando $\ln(\cdot)$ na equação 1 e substituindo $(w_t m_t h_t)^{-\gamma}$ por $c_t^{-\gamma}$ vem:

$$-f_t - \gamma \ln c_t + \underbrace{\ln w_t + \ln h_t}_{=Z} = \ln \mu + \ln H_t$$

derivando em relação ao tempo:

$$-f - \gamma \frac{\dot{c}_t}{c_t} + \frac{\dot{h}_t}{h_t} = \frac{\dot{\mu}}{\mu} + \frac{\dot{H}_t}{H_t}$$

Como não há crescimento populacional e $H_t = h_t$

em equilíbrio:

$$-f - \gamma \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dot{\mu}}{\mu} \rightarrow \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \left(-\frac{\dot{\mu}}{\mu} - f \right) \frac{1}{\gamma}$$

$$= \frac{(n_t - f)}{\gamma}$$

Repare que n_t deve ser constante em BGP, $n_t = n$

Além disso, $\frac{\dot{h}_t}{h_t}$ cresce a mesma taxa que

$$h_t = (1 - n_t) \cdot H_t = (1 - n) \cdot H_t$$

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = (1 - n) h_t, \text{ temos}$$

$$\frac{\dot{h}_t}{h_t} = 1 - n.$$

Logo, $\frac{C_t}{C_t} = \frac{1}{\gamma} (n-s) = 1-n \rightarrow$

$n-s = \gamma - \gamma n \rightarrow$

$n(1+\gamma) = \gamma + \gamma \rightarrow n = \frac{\gamma + \gamma}{1+\gamma}$

e a taxa de crescimento é dada por

$1-n = \frac{1+\gamma - \gamma - \gamma}{1+\gamma} = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$

d) O planejador central sabe que $Y_t = h_t$
então o problema do planejador é dado
por:

max $\int_0^{\infty} e^{-\beta t} \frac{C_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} dt$
 $C_t, t \in [0, \infty)$
 $n_t, t \in [0, \infty)$
 $h_t, t \in (0, \infty)$

sujeito a:
 $C_t = Z n_t h_t$
 $h_t = (1-n_t) h_t$

Hamiltoniano:

$H = e^{-\beta t} \cdot \frac{(Z n_t h_t)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \mu \cdot (1-n_t) h_t$

n é controlável h é estado

$$H_m = 0 \rightarrow (1) \quad e^{-\rho t} \cdot (z_m t h_t)^{-\gamma} \cdot z h_t - \mu h_t = 0$$

$$H_h = -\dot{\mu} \rightarrow (2) \quad e^{-\rho t} (z_m t h_t)^{-\gamma} \cdot z m_t + \mu(1 - m_t) = -\dot{\mu}$$

De (1), $e^{-\rho t} (z_m t h_t)^{-\gamma} \cdot z = \mu$

Substituindo em (2)

$$\mu m_t + \mu - \mu m_t = -\dot{\mu} \rightarrow -\frac{\dot{\mu}}{\mu} = 1$$

Substituindo $z_m t h_t$ por c_t e aplicando

$\ln(\cdot)$ em (1)

$$-\rho t - \gamma \ln c_t + \ln z = \ln \mu. \quad \text{Derivando em relação a}$$

$$t : \quad -\rho - \gamma \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dot{\mu}}{\mu} = -1$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1-\rho}{\gamma}}$$

e) Repare que $\frac{1-\rho}{\gamma} > \frac{1-\rho}{1+\gamma}$, ou seja, a taxa de crescimento na solução com planejamento central é maior que a taxa de crescimento obtida com a solução via mercado. A razão para isso é que há externalidades

nesta economia. A decisão do indivíduo de quantas horas estudar não impacta somente o aumento do seu estoque de capital humano, mas dos demais indivíduos desta economia também, já que a variação do estoque individual de capital humano depende do estoque agregado de capital humano.

f) A restrição orçamentária do indivíduo passa a ser: $C_t = n_t h_t w_t + \phi w_t h_t (1 - n_t) - T_t$

Reescrevendo o Lagrangiano

$$\mathcal{L}: \bar{e}^{pt} \cdot \frac{[n_t h_t w_t + \phi w_t h_t (1 - n_t) - T_t]^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \mu (1 - n_t) H_t$$

n_t : controle, h_t estado

$$\mathcal{L}_n = 0 \rightarrow \bar{e}^{pt} \cdot C_t^{-\gamma} \cdot (h_t w_t - \phi w_t h_t) - \mu H_t = 0$$

$$\mathcal{L}_h = -\dot{\mu} \rightarrow \bar{e}^{pt} \cdot C_t^{-\gamma} \cdot (n_t w_t + \phi w_t (1 - n_t)) = -\dot{\mu}$$

dividindo as duas equações:

$$\frac{-\dot{\mu}}{\mu H_t} = \frac{n_t \omega_t + \phi \omega_t (1 - n_t)}{h_t \omega_t (1 - \phi)} = \frac{n_t + \phi(1 - n_t)}{h_t (1 - \phi)}$$

Em equilíbrio $H_t = h_t \rightarrow$

$$\frac{-\dot{\mu}}{\mu} = \frac{n_t + \phi(1 - n_t)}{1 - \phi}$$

Aplicando $\ln$ em (*)

$$-\dot{f}_t - \gamma \ln c_t + \ln(1 - \phi) + \ln h_t + \ln \omega_t = \ln \mu + \ln H_t$$

Da solução do problema da firma $\omega_t = z$ constante no tempo, derivando em relação a t

$$-\dot{f} - \gamma \frac{\dot{c}_t}{c_t} + \frac{\dot{h}_t}{h_t} = \frac{\dot{\mu}}{\mu} + \frac{\dot{H}_t}{H_t}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \left[-\dot{f} + \frac{n_t + \phi(1 - n_t)}{1 - \phi} \right] \cdot \frac{1}{\gamma}$$

Note que, em BGP, n_t é constante, $n_t = n$.

Além disso $\frac{\dot{h}_t}{h_t} = \frac{\dot{c}_t}{c_t}$.

Como $\frac{\dot{h}_t}{h_t} = 1 - n$, temos:

$$1-n = \left(-s + \frac{n+\phi(1-n)}{1-\phi} \right) \frac{1}{\gamma} \rightarrow$$

$$\gamma(1-n) = \frac{-s(1-\phi) + n + \phi(1-n)}{1-\phi}$$

$$(1-\phi) \cdot \gamma(1-n) = -s(1-\phi) + n + \phi(1-n)$$

$$(1-\phi) \cdot (\gamma + s) - \phi = n \cdot [\cancel{1-\phi} + \gamma(1-\phi)]$$

$$= n(1-\phi) \cdot (1+\gamma)$$

$$\rightarrow n = \frac{(1-\phi) \cdot (\gamma + s) - \phi}{(1-\phi)(1+\gamma)}$$

taxa de crescimento é dada por $1-n$, logo

$$1-n = \frac{(1-\phi)(1+\gamma) - (1-\phi)(\gamma+s) + \phi}{(1-\phi)(1+\gamma)}$$

$$= \frac{(1-\phi) + \cancel{\gamma(1-\phi)} - \cancel{\gamma(1-\phi)} - \cancel{s(1-\phi)} + \phi}{(1-\phi)(1+\gamma)}$$

$$= \frac{1-s(1-\phi)}{(1-\phi)(1+\gamma)}$$

Queremos que essa taxa de crescimento
seja a mesma da solução com planejador
central, logo:

$$\frac{1 - s(1-\phi)}{(1-\phi)(1+r)} = \frac{1-s}{r} \rightarrow$$

$$r - sr(1-\phi) = (1-s)(1+r) \cdot (1-\phi) \rightarrow$$

$$r - sr + \phi sr = (1-s)(1+r) - \phi(1-s)(1+r) \rightarrow$$

$$\phi(sr + (1-s)(1+r)) = (1-s)(1+r) + sr - r \rightarrow$$

$$\phi \cdot (\cancel{sr} + 1 + r - s - \cancel{sr}) = 1 + r - s - \cancel{sr} + \cancel{sr} - r \rightarrow$$

$$\phi(1+r-s) = 1-s \rightarrow$$

$$\boxed{\phi = \frac{1-s}{1+r-s}}$$