Estatística de Redes Sociais

Complementos e exercícios da aula 14.
31 de outubro de 2020

- Dado $u \in \mathcal{S}_N$, para todo $a \in \{1, ..., N\}$ seja

$$r(a|u) = \frac{e^{+u(a)} + e^{-u(a)}}{\sum_{b \in A} \left[e^{(+1)u(b)} + e^{(-1)u(b)} \right]}.$$

- Dado $u \in \mathcal{S}_N$, seja

$$a_1(u) = \text{argmax}\{|u(a)| : a \in \mathcal{A}\},$$
$$a_2(u) = \text{argmax}\{|u(a)| : a \in \mathcal{A} \setminus \{a_1(u)\}\},$$
$$...$$
$$a_N(u) = \text{argmax}\{|u(a)| : a \in \mathcal{A} \setminus \{a_1(u), a_2(u), ..., a_{N-1}(u)\}\}.$$

- Para todo $\xi \in [0, 1]$, defina

$$A(u, \xi) = \inf\{a \in \mathcal{A} : \sum_{b=1}^{a} r(a_b(u)) > \xi\}.$$

- Dado $u \in \mathcal{S}_N$ e $a \in \{1, ..., N\}$, para todo $\xi \in \{0, 1\}$ seja

$$O(u(a), \xi) = \begin{cases} +1, & \text{se } \xi < \dfrac{1}{1 + e^{-2u(a)}}, \\ -1, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

1 Pseudocódigo

1. Inicialização: Escolha uma lista $u \in \mathcal{S}_N$. Escolha um tempo $T \geq 1$.
2. Defina $U_0 = u$ e $U = (U_0)$
3. Para n de 1 até T faça:
   - 3.1 Sorteie (independentemente dos sorteios anteriores) ξ_n^1 uniforme em $[0, 1]$
   - 3.2 Atualize $A_n = A(U_{n-1}, \xi_n^1)$.
   - 3.3 Sorteie (independentemente dos sorteios anteriores) ξ_n^2 uniforme em $[0, 1]$.
   - 3.4 Atualize $O_n = O(U_{n-1}(A_n), \xi_n^2)$.
   - 3.5 Defina $U_n = \pi_{A_n, O_n}(U_{n-1})$.
   - 3.6 Atualize U concatenando a sequência anterior U com U_n: $U = UU_n$.
4. Imprima U.

2 Exercícios

1. Queremos simular os primeiros $T = 10$ passos da evolução de uma rede com $N = 3$ atores e tendo como lista inicial $u \in \mathcal{S}_3$ assim definido: $u(1) = -5$, $u(2) = 0$, $u(3) = 4$. Faça essa simulação usando o algoritmo descrito acima e usando a sequência de números aleatórios

$$\xi_1^1 = 0.63,\ \xi_1^2 = 0.51,$$
$$\xi_2^1 = 0.62,\ \xi_2^2 = 0.45,$$
$$\xi_3^1 = 0.94,\ \xi_3^2 = 0.26$$
$$\xi_4^1 = 0.27,\ \xi_4^2 = 0.47,$$
$$\xi_5^1 = 0.16,\ \xi_5^2 = 0.21,$$

$$\xi_6^1 = 0.09,\ \xi_6^2 = 0.70,$$
$$\xi_7^1 = 0.48,\ \xi_7^2 = 0.83,$$
$$\xi_8^1 = 0.58,\ \xi_8^2 = 0.84,$$
$$\xi_9^1 = 0.92,\ \xi_9^2 = 0.48,$$
$$\xi_{10}^1 = 0.37,\ \xi_{10}^2 = 0.12.$$

2. Repita a simulação anterior, usando os mesmos números aleatórios ξ_i^j, $= 1, ..., 20$, $j = 1, 2$, mas tendo agora como lista inicial v satisfazendo $v(1) = 10$, $v(2) = -2$, $v(3) = 0$.

3. Dado $u \in \mathcal{S}_N$, seja $t_N(u)$ o primeiro instante $n \geq 1$ tal que a $|U_n(a)| \leq N - 1$ para todo $a \in \mathcal{A}$, onde U_n é o conjunto de pressões no instante n no modelo de rede social tendo como lista inicial $U_0 = u$. Verifique se $t_3(u)$ e $t_3(v)$ são ambos menores do que $T = 10$, sendo u e v as listas iniciais dadas nos exercícios 1 e 2.

4. Diga se é verdadeira a afirmação:

$$\mathbb{P}(t_3(u) > T) \leq \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^{\lfloor T/3 \rfloor},$$

onde $\lfloor m \rfloor = \sup\{z \in \mathbb{Z} : z \leq m\}$. Justifique a sua resposta utilizando cálculos feitos em classe.

5. Dado $u \in \mathcal{S}_N$, seja $t_{e^{(+1)}}(u)$ o primeiro instante $n \geq 0$ tal que a $U_n = e^{(+1)}$, isto é, o primeiro instante $n \geq 0$ tal que $U_n(a) = a - 1$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Verifique se ocorreram $t_{e^{(+1)}}(u)$ e $t_{e^{(+1)}}(v)$ nas simulações feitas nos exercícios 1 e 2.

6. Diga se é verdadeira a afirmação:

$$\mathbb{P}(t_{e^{(+1)}}(u)) = m + N \mid t_N(u) = m) \geq \prod_{n=1}^{N} \zeta_n \frac{1}{1 + e^{2(N-n)}},$$

onde

$$\zeta_n = \frac{2}{2 + \sum_{k=0}^{n-1} [e^k + e^{-k}] + (N - n)(e^{(N-1)+n} + e^{-((N-1)+n)})}.$$

Justifique a sua resposta utilizando cálculos feitos em classe.

7. Modifique o algoritmo dado no pseudo código de tal forma que o sistema rode até a primeira vez que $t_{e^{(+1)}}(u)$ ocorre pela primeira vez.