Resolução - Exercícios - Cálculo IV - Aula 8 - Semana 13/10 – 16/10

Exercício 1. *Calcule a soma de cada uma das seguintes séries, bem como seu intervalo de convergência:*

a $x + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots$

b $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots$

Solução. Calculemos a soma para cada item.

a Queremos calcular o raio de convergência de $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$. Pelo critério inverso da razão,

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$$

logo a série converge para algum número $f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Note que $xf(x) = x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, mas a segunda série é $e^x - 1 - x$.

- Para $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\left(x^2 + e^x - 1 - x\right) \\ &= \frac{e^x + x^2 - x - 1}{x} \end{aligned}$$

- Para $x = 0$, substituindo diretamente na série, devemos ter $f(x) = 0$.

Observação: Pelo teorema exibido na aula do professor Possani, deveríamos ter em particular que f é contínua em 0. Tomando o limite na expressão anterior, temos indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, usando L'Hospital, ficamos com $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+2x-1}{1} = 0$, confirmando a continuidade da função.

b Seja $S = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + ...$, note que $xS = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + ...$ Assim,

$$S(1-x) = S - xS = x + x^2 + x^3 + x^4 + ... = \frac{x}{1-x}$$

Onde a última igualdade ocorre em $]-1,1[$, logo $S = \frac{x}{(1-x)^2}$ neste intervalo. Substituindo $x = \pm 1$ na série, ficamos com termo geral n ou $(-1)^n n$, que em ambos os casos não tende para 0.

□

Exercício 2. *Determine uma série de potências para representar $f(x)$ em cada caso e dê o raio de convergência:*

a $\frac{1}{1+x^2}$

b $\frac{1}{(1+x)^2}$

c $\frac{x^2}{1-x^2}$

d $\frac{x^2+1}{x-1}$

e $\frac{3}{2x+5}$

f $\frac{x}{2-3x}$

g e^{-x}

h $senh(x)$

Solução. a Como

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1$$

Trocando x por $-x^2$, temos:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - ...$$

Como essa é uma série geométrica, temos que $|-x^2| < 1$, isto é, $x^2 < 1$, ou $|x| < 1$. Portanto o raio de convergência é $R = 1$.

b Para $|q| < 1$, a série geométrica tem a expressão

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Tomando $q = -x$, temos que $|-x| = |x| < 1$ (ou seja $R = 1$), e a expressão fica

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Por fim, tomando a derivada de ambos os termos e multiplicando por -1, chegamos a expressão desejada

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1}$$

Sendo o raio de convergência o mesmo depois de uma derivação, $R = 1$

c Para $|q| < 1$, a série geométrica tem a expressão

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Tomando $q = x^2$, a expressão fica

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

Por fim, multiplicando ambos os termos por x^2, chegamos a expressão desejada

$$\frac{x^2}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2}$$

Temos convergência para $|x| < 1$, portanto $R = 1$.

d Sabemos que em $]-1, 1[$ temos $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

$$\begin{aligned}
-(x^2+1)\frac{1}{1-x} &= \frac{x^2+1}{x-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} -(x^2+1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} -x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -x^{n+2} \\
&= -1 - x + \sum_{n=2}^{\infty} -x^n + \sum_{n=2}^{\infty} -x^n \\
&= -1 - x - \sum_{n=2}^{\infty} 2x^n
\end{aligned}$$

Novamente $R = 1$.

e Note que:

$$\frac{3}{2x+5} = \frac{3}{2}\frac{1}{(x+\frac{5}{2})} = \frac{3}{2}\frac{1}{[\frac{5}{2}(1+\frac{2x}{5})]} = \frac{3}{5}\frac{1}{(1-(-\frac{2x}{5}))} = \frac{3}{5}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2x}{5}\right)^n\right] = \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2x}{5}\right)^n$$

Assim, temos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{5}\frac{(-1)^n 2^n x^n}{5^n}$$

Com convergência para $\left|-\frac{2x}{5}\right| < 1$, ou seja, $|x| < \frac{5}{2}$. Portanto, $R = 5/2$.

f Note que para $|\frac{3x}{2}| < 1$ podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{x}{2-3x} &= \frac{x}{2}\frac{1}{1-\frac{3x}{2}} \\ &= \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3x}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

Como $|\frac{3x}{2}| < 1$ temos $R = 2/3$

g Substituindo $-x$ na série de Taylor da exponencial, desenvolvida na aula do Prof. Possani, ficamos com a série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

da função e^{-x}, que de novo é convergente em toda a reta.

h Notando que

$$1-(-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par}\end{cases}$$

e aplicando o resultado do item anterior, temos

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)x^n}{n!}\right) \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

$\square$