MAT1514 – A Matemática na Educação Básica

IME-USP

Prof. Dr. Júlio César Augusto do Valle

Aula - 17/09

Em nossa terceira semana, teremos:

- Combinado sobre as datas das provas;
- Gravação das aulas e Monitoria;
- Continuação do estudo das matrizes (transposta, inversa… e criptografia;

- Combinados para nosso primeiro TG (Fórum dos grupos)

Datas das Provas

- P1 – 26 de Outubro;
- P2 – 23 de Novembro;
- Psub – 17 de Dezembro

Introdução ao TG1

- Formação dos grupos/Fórum

Gravação das aulas

- A partir de 24/09.

Continuação
Transposição de matrizes

Matriz transposta de uma matriz A é a matriz que se obtém trocando ordenadamente linhas por colunas e representa-se por A^T.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriz simétrica

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \text{ é uma matriz simétrica pois } \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Propriedades da Transposição de Matrizes

- $\left(A^T\right)^T = A$
- Se $k \in IR$ então $(kA)^T = kA^T$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

E a criptografia?

Criptografando Matriz chave/ matriz código

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

"OS NÚMEROS GOVERNAM O MUNDO."

Criptografando Matriz chave/ matriz código

"OS NÚMEROS GOVERNAM O MUNDO."

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	.	,	_	¬
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

O	S	_	N	U	M	E	R	O	S	_	G	O	V	E	R	N	A	M	_	O	_	M	U	N	D	O	.
15	19	29	14	21	13	5	18	15	19	29	7	15	22	5	18	14	1	13	29	15	29	13	21	14	4	15	27

Criptografando Matriz chave/ matriz código

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

O	S	_	N	U	M	E	R	O	S	_	G	O	V	E	R	N	A	M	_	O	_	M	U	N	D	O	.
15	19	29	14	21	13	5	18	15	19	29	7	15	22	5	18	14	1	13	29	15	29	13	21	14	4	15	27

Como a matriz codificadora tem Duas linhas e duas colunas, devemos arranjar a sequência de números em uma matriz com duas linhas. Assim, a matriz mensagem será:

$$M = \begin{bmatrix} 15 & 19 & 29 & 14 & 21 & 13 & 5 & 18 & 15 & 19 & 29 & 7 & 15 & 22 \\ 5 & 18 & 14 & 1 & 13 & 29 & 15 & 29 & 13 & 21 & 14 & 4 & 15 & 27 \end{bmatrix}$$

Se a mensagem tivesse uma quantidade ímpar de símbolos, você poderia acrescentar um espaço (_ - 29) ou um número qualquer maior que 30, no final.

Criptografando Matriz chave/ matriz código

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Agora, para codificar a mensagem, multiplicamos a matriz M à esquerda pela matriz codificada A:

$$N = A \cdot M$$

$$N = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 & 19 & 29 & 14 & 21 & 13 & 5 & 18 & 15 & 19 & 29 & 7 & 15 & 22 \\ 5 & 18 & 14 & 1 & 13 & 29 & 15 & 29 & 13 & 21 & 14 & 4 & 15 & 27 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 110 & 221 & 243 & 77 & 196 & 268 & 130 & 293 & 166 & 242 & 243 & 63 & 180 & 299 \\ 45 & 92 & 100 & 31 & 81 & 113 & 55 & 123 & 69 & 101 & 100 & 26 & 75 & 125 \end{bmatrix}$$

Criptografando Matriz chave/ matriz código

E, em seguida, alinhamos os elementos de $N = A \cdot M$ para formarmos a mensagem codificada. Utilizamos vírgula entre os números para facilitar a leitura na hora da decodificação. A mensagem codificada é: 110, 221, 243, 77, 196, 268, 130, 293, 166, 242, 243, 63, 180, 299, 45, 92, 100, 31, 81, 113, 55, 123, 69, 101, 100, 26, 75, 125.

Matriz Inversa

Chama-se **matriz inversa** da matriz quadrada A de ordem n, à matriz que multiplicada por A, à esquerda e à direita, dá a matriz identidade da mesma ordem.

A matriz inversa, quando existe, é da mesma ordem que A e representa-se por A^{-1}.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Verificar que a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ Exemplo

Matriz Inversa

$$A.A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

$$A^{-1}.A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

Exemplo de obtenção da Matriz Inversa

Determinar a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, se existir, utilizando a definição da matriz inversa.

Exemplo de obtenção da Matriz Inversa

Resolução

Suponhamos que a matriz inversa é $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, então $A.A^{-1} = I_n$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+3z & y+3w \\ 6z & 6w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3z=1 \\ y+3w=0 \\ 6z=0 \\ 6w=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{1}{2} \\ z=0 \\ w=\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Exemplo de obtenção da Matriz Inversa

Assim, a matriz inversa da matriz A é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

E em nosso exemplo?

O	S	_	N	U	M	E	R	O	S	_	G	O	V	E	R	N	A	M	_	O	_	M	U	N	D	O	.
15	19	29	14	21	13	5	18	15	19	29	7	15	22	5	18	14	1	13	29	15	29	13	21	14	4	15	27

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Qual o papel das matrizes no processo de codificação?

Qualquer matriz pode ser chave para criptografar?

Quais são as condições para a inversibilidade da matriz?

Como encontrar a matriz inversa de matrizes cujas dimensões são maiores?

TG1 – Como elaborar uma sequência didática de matemática?

Fórum → Formação dos Grupos 21/09

Orientações e Prazos → 22/09 no e-disciplinas

Compartilhamento de dúvidas e explicação sobre o TG1 → Aula 24/09