

# AULA MECÂNICA

28/10

10

- REVISÃO ANTES DA PROVA
- ESPAÇOS AFINS E TRANSFORMAÇÕES AFINS.

~~o~~ "ESPAÇO VETORIAL" SEM ORIGEM.

~~A~~ ESPAÇO AFIM  $E$  É ESPAÇO VETORIAL

$$X, Y \in A, \quad X - Y \in E$$

$T: A \supset$  TRANSFORMAÇÃO AFIM  $\rightarrow E$  SÊ:

$$T': E \rightarrow E. \quad \text{ESTÁ BEM DEFINIDA}$$

$$X \in A, \quad v \in E.$$

$$T'(v) = T(X+v) - T(X)$$

NÃO DEPENDE DE  $X \in A$ .

$T'$  TEM QUE SER LINEAR.

• ESPAÇO GALILEANO.

$$A^4, \quad \tau: A^4 \rightarrow \mathbb{R}.$$

PROJETO INTERNO NA  $N(\tau)$ .

$$X, Y \in A^4 \text{ SIMULTÂNEOS SE } \tau(X - Y) = 0.$$

NOÇÃO DE DISTÂNCIA ENTRE  $\langle \cdot, \cdot \rangle \in M(N, \mathbb{C})$   
 EVENTOS SIMULTÂNEOS (2)

~~TRANSFORMAÇÕES GALILEANAS.~~

SE  $x$  E  $y$  SÃO SIMULTÂNEOS,

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} \dots$$

- TRANSFORMAÇÃO GALILEANA.

$G: A \rightarrow$

$$\bullet T(G(x) - G(y)) = T(x - y), \quad \forall x, y \in A.$$

• SE  $x, y$  SÃO SIMULTÂNEOS

$$d(G(x), G(y)) = d(x, y).$$

• EX:  $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ .  
 $(T: (t, x_1, x_2, x_3) = T) \in \text{ESPAÇO AFIM}$

TRANSFORMAÇÕES. Fixo  $(t_0, x_1, x_2, y_3)$

$$G_1 = (t, x_1, x_2, x_3) \rightarrow (t + t_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

TRANSLAÇÃO

- M. R. V.
- TRANSFORMAÇÕES ORTOGONAIS DE  $\mathbb{R}^3$ .

- DETERMINISMO NEWTONIANO  
E DADOS  $N$  PONTOS

$$X_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{Posição de cada ponto.}$$

$$\exists F: \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^{3N} \quad \text{forças}$$

Tal que

$$m_i \ddot{X}_i = F(X, \dot{X}, t)$$

$m_i, i=1, \dots, N$   
são números  
REAIS  
ESTRITAMENTE POSITIVOS

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$$

# 4 GAUROS DE SISTEAS GALICANAS SISTEAS MEANICOS GERAI

SISTEAS C/ 1 POTO MATERIAL.

$$\ddot{X} = F(X, \dot{X}, t)$$

$$\ddot{X} = F(X)$$

FORA POSICIONAL.

$$X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

POTO MATERIAL ANDANDO  
EM 1 GRAU DE LIBERDADE.

$$\ddot{X} = F(X)$$

→ SISTEMA CONSERVATIVO

- DEFINIR ENERGA POTENCIAL

$$U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F = -U'$$

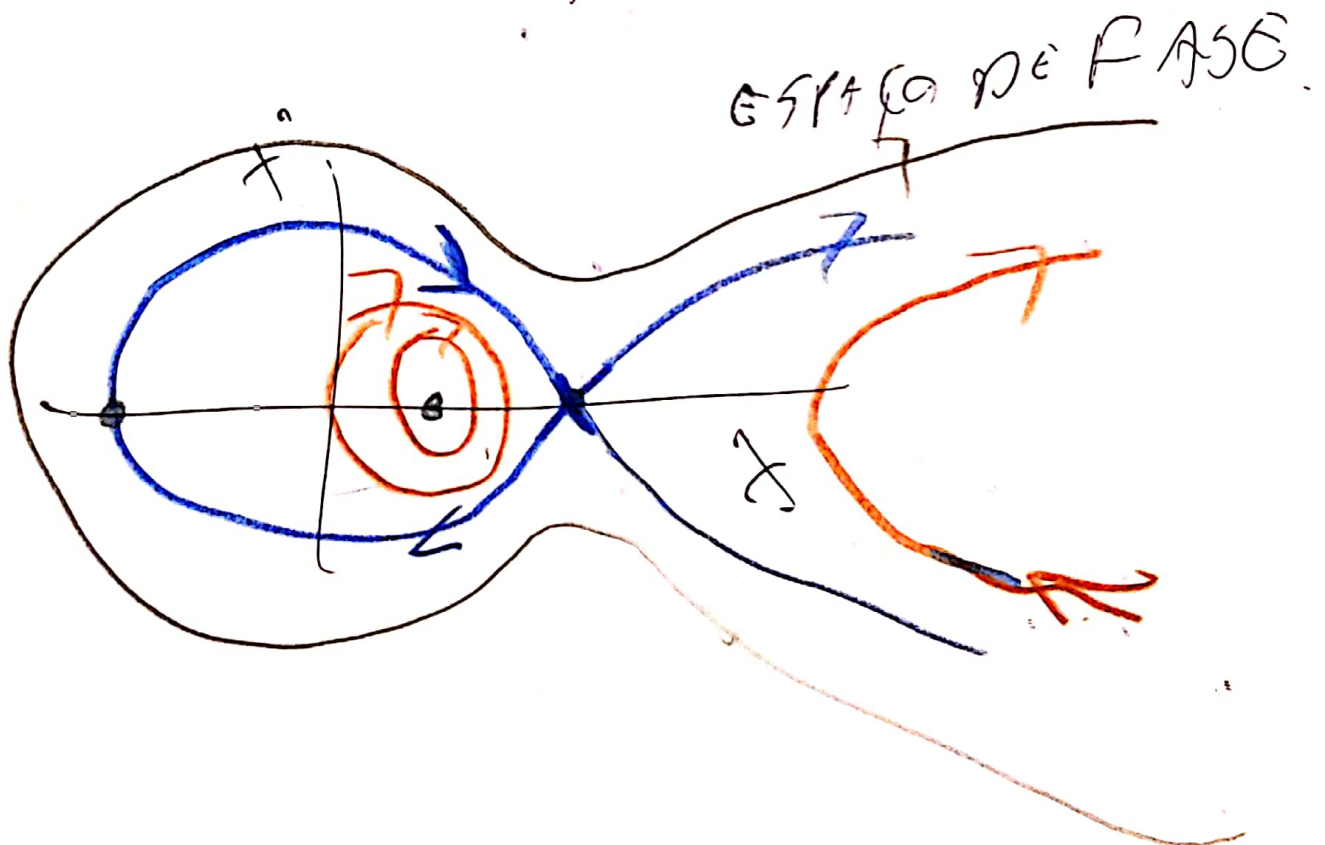
ENERGIA:

(5)

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + U(x).$$

$E$  CONSTANTE SOBRE AS SOLUÇÕES.

• DADO O GRÁFICO DE  $U$ , ENTENDAMOS QUALITATIVAMENTE TODO O SISTEMA.

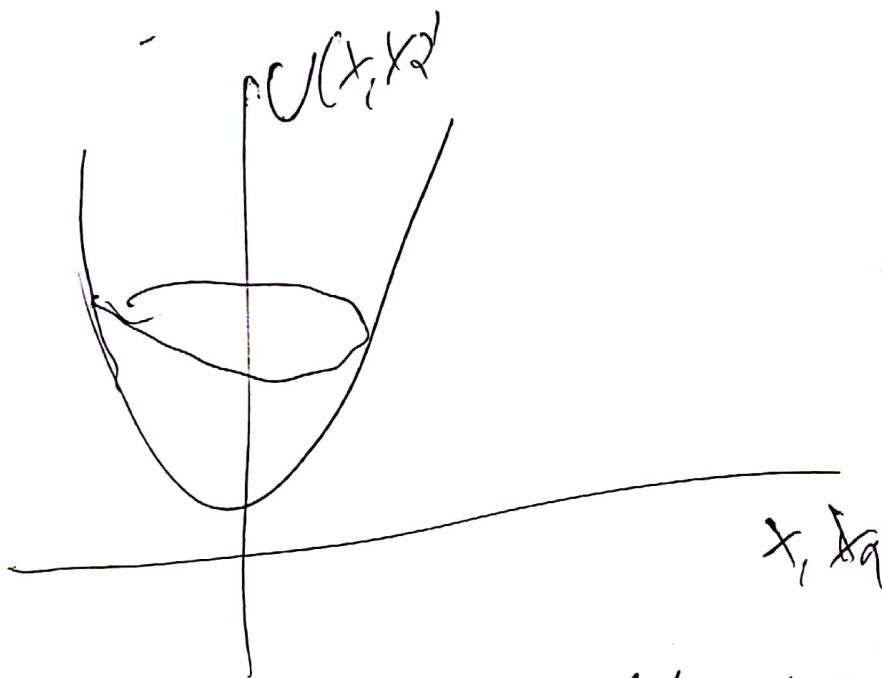




$$\ddot{x}_1 = -x_1$$

$$\ddot{x}_2 = -x_2$$

$$U(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} \quad (6)$$



— SISTEMAS CONSERVATIVOS P/  
MOVIMENTO EM MAIS DE 1  
GRAU DE LIBERDADE.

• SE

$$\ddot{X} = F(X) \quad \text{E} \quad F = - \frac{\partial U}{\partial X}$$

VALE A CONSERVAÇÃO DA ENERGIA.

• NEM SEMPRE  $F$  É CONSERVATIVA.

7

Condição necessária  
2 graus de liberdade.

$$F = (F_1, F_2)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$$

Condição  
suficiente:

Trabalho de  $F$  em qualquer curva  
só depende dos  
extremos

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Trabalho de  $F$  sobre  $\gamma$ .

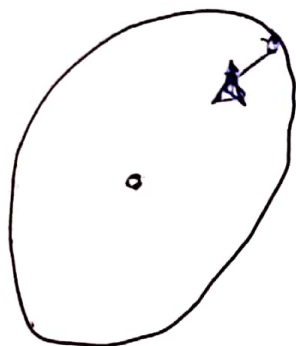
$$W(F, \gamma) = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$



- FORÇAS CENTRAIS:

8

$$F(x) = \Phi(\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|}$$



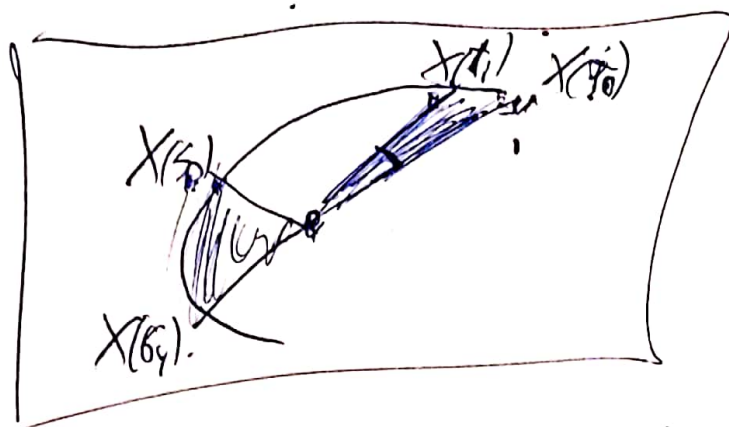
- FORÇAS CENTRAIS SÃO CONSERVATIVAS
- LEI DAS ÁREAS DE KEPLER.
- CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR.
- MOVIMENTO PLANO.
- ENERGIA POTENCIAL EFETIVA.

$$M(x) \subset X(x) \cap \dot{X}(x)$$

ENTÃO  $M$  É CONSTANTE EM SOLUÇÕES  
DO PROBLEMA DE FORÇAS  
CENTRAIS



(9)



- TEMAS COM EQUAÇÃO V/

$$\ddot{r} = [G(r)]$$

$$r = \|x\|$$

$$G = -V'(r)$$

$$V = U + \frac{m^2}{2R^2}$$

- ESTABILIDADE DE LIAPUNOV

PONTOS DE EQUILÍBRIO - SISTEMAS CONSERVATIVOS

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Pontos fixos:

$(x_0, a)$  onde

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x_0) = 0$$

# ESTABILIDADE DE LIAPUNOV.

(10)

$(x_0)$  é estável se,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$   
tal que, se

$y(t)$  é solução com.

$$|y(0) - x_0| < \delta, \quad |\dot{y}(0)| < \delta.$$

então  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  
vale que:

$$|y(t) - x_0| < \epsilon, \quad |\dot{y}(t)| < \epsilon.$$

• TEOREMA DE DIRICHLET-LAGRANGE.

Se  $x_0$  é ponto de mínimo estrito <sup>local</sup> de

$V$  então  $(x_0, 0)$  é estável segundo  
LIAPUNOV.

• DEMONSTRAÇÃO:

$V$  é função de LIAPUNOV.

SISTEMAS C/ N pontos

(11)

$m_1, \dots, m_N$  são massas

$$m_i \ddot{x}_i = F_i(x)$$

Forças Posicionais

Forças de Interação

$$F_i(x) = \sum_{j \neq i} F_{ij}(x) + F_i'(x)$$

onde  $F_{ij}(x) = -F_{ji}(x)$

$F_{ij}(x)$  tem a direção de

$$x_i \rightarrow x_j$$



PROPRIEDADES QUANDO SISTEMA SÓ TEM  
FORÇAS DE INTERAÇÃO:

(12)

- MOMENTO TOTAL CONSTANTE

$$\sum_i m_i \dot{X}_i$$

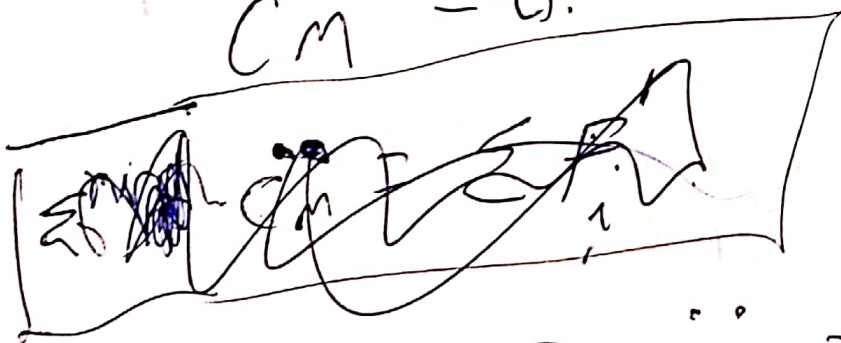
- CENTRO DE MASSA ANDA COM VELOCIDADE  
CONSTANTE.

$$\dot{C}_M = \frac{\sum m_i \dot{X}_i(t)}{\sum m_i}$$

$\dot{C}_M$  É CONSTANTE

$$\ddot{C}_M = 0.$$

NO CASO GERAL.



$$(\sum m_i) \ddot{C}_M = \sum F_i$$

- CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR TOTAL (13)  
QUANDO  $F_i' \equiv 0$ .

---

FORÇAS CONSERVATIVAS.

SE  $F_i' \equiv 0$  E  $F_{ij}$  DEPENDE  
APENAS DE  $\|X_i - X_j\|$

ENTÃO EXISTE

$$U: \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

TAI QUE

$$F_i = - \frac{\partial U}{\partial X_i}$$

$$E = \sum \frac{1}{2} m_i \| \dot{X}_i \|^2 + U(X).$$

É CONSERVADA.