MAT0234 Medida e integração
IME-USP segundo semestre 2020
Lista Medida

1. Se $\mu_1, \ldots, \mu_n$ são medidas em $(X, \mathcal{M})$ e $a_1, \ldots, a_n \in [0, \infty)$, então $\sum_{i=1}^n a_i \mu_i$ é uma medida em $(X, \mathcal{M})$.

2. Para uma sequência $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X, lembramos que

$$\liminf E_n \doteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} E_n \text{ e } \limsup E_n \doteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} E_n$$

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, então $\mu(\liminf E_n) \leq \liminf \mu(E_n)$. Além disso, se $\mu(\cup_1^\infty E_n) < \infty$, então $\mu(\limsup E_n) \geq \limsup \mu(E_n)$.

3. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $E, F \in \mathcal{M}$. Então $\mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) = \mu(E) + \mu(F)$.

4. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $E \in \mathcal{M}$. Defina $\forall A \in \mathcal{M}$, $\mu_E(A) = \mu(E \cap A)$. Então μ_E é uma medida.

Definição. Uma função μ em $(X, \mathcal{M})$, $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ é dita:

i. *medida finitamente aditiva* se $\mu(\emptyset) = 0$ e, para toda $\{E_n\}_{n=1}^k \subset \mathcal{M}$ família de conjuntos disjuntos, $\mu(\cup_{n=1}^k E_n) = \sum_{n=1}^k \mu(E_n)$.

ii. *contínua para cima* se $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \lim \mu(E_n)$ sempre que $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sequência crescente em $\mathcal{M}$.

iii. *contínua para baixo* se $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \lim \mu(E_n)$ sempre que $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sequência decrescente em $\mathcal{M}$ com $\mu(E_{n_0}) < \infty$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$.

5. Seja μ uma medida μ finitamente aditiva em $(X, \mathcal{M})$, então

1. μ é σ-aditiva se, e somente se, μ é contínua para cima.
2. Suponha $\mu(X) < \infty$, então μ é σ-aditiva se, e somente se, μ é contínua para baixo.

6. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida finita.

(a) Se $E, F \in \mathcal{M}$ e $\mu(E \Delta F) = 0$, então $\mu(E) = \mu(F)$.

(b) Defina $E \sim F$ se $\mu(E \Delta F) = 0$. Então μ é uma relação de equivalência em $\mathcal{M}$.

(c) Defina $\rho(E, F) \doteq \mu(E \Delta F)$. Então $\rho(E, G) \leq \rho(E, F) + \rho(F, G)$, de modo que ρ define uma métrica no quociente $\mathcal{M}/\sim$.

7. Seja $\mu\ : \wp(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ dada por $\mu(A) = 0$ se A for finito e $\mu(B) = +\infty$ se B for infinito. Mostre que μ é aditiva mas não é σ-aditiva.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) \geq 0$ Riemann integrável e defina $\mu((a,b]) = \int_a^b f(x)dx$ com a integral de Riemann. Mostre que μ define uma pré-medida na álgebra gerada pelos intervalos semi-abertos de $\mathbb{R}$.

Observe que a medida do último exercício estende-se à σ-álgebra dos Borelianos, mas não como uma integral de Riemann.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com f não decrescente. Defina $\mu((a,b]) = f(b) - f(a)$ Mostre que μ define uma pré-medida na álgebra gerada pelos intervalos semi-abertos de $\mathbb{R}$.

Definição. Uma medida μ no espaço X chama-se probabilidade se $\mu(X) = 1$.

Exemplo. São probabilidades as medidas $\mu((a,b]) = \int_a^b f(x)dx$ com a integral de Riemann, para as f seguintes pré-medidas:

1. $f_1(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

2. $f_2(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leq 0 \\ \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}, \text{ se } x > 0 \end{cases}$

10. Seja $X = \mathbb{N}$ e $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos, com $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Definimos $\mu(n) = p_n$. Mostre que μ é uma probabilidade em $\wp(\mathbb{N})$. Calcule $\mu(A)$ para qualquer $A\ \in\ \wp(\mathbb{N})$.

11. Seja $S^2\ \subset\ \mathbb{R}^3$ a esfera de raio 1. Seja, em coordenadas esféricas, $U = \{0 <\ \alpha_1\ \leq\ \alpha_2\ \leq\ 2\pi\ ; 0 <\ \phi_1\ \leq\ \phi_2\ \leq\ \pi\}$. Defina

$$\mu(U) = \frac{\int\int_U sen(\phi)\ d\phi\ d\alpha}{4\pi}$$

com a integral de Riemann. Mostre que μ define uma pré medida na álgebra gerada pelos retângulos U semi-abertos de S^2.

12. Seja $\mu(\ [0,1] \times [0,1], \mathcal{B}) \to [0, +\infty]$ a medida de Lebesgue, onde temos $\mu\ ((a,b) \times (c,d)\ =\ (b-a)\ (d-c)$. Calcule a medida de $(\mathbb{Q}\ \cap\ [0,1]) \times [0,1]$.

13. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $\mathcal{Z}\ =\ \{E\ \in\ \mathcal{A} :\ \mu(E) = 0\}$.

1. Mostre que se $E\ \in\ \mathcal{A}$ e $F\ \in\ Z$ então $E\ \cap\ F\ \in\ \mathcal{Z}$.

2. Mostre que $\mathcal{Z}$ é fechado para uniões enumeráveis.

3. Considere $\bar{\mathcal{A}}$ a família de conjuntos da forma $(E\ \cup\ Z_1)\ -\ Z_2$ onde $Z_1,\ Z_2$ são subconjuntos de conjuntos de $\mathcal{Z}$ (ou seja subconjuntos de conjuntos de medida zero). Mostre que se $G\ \in\ \bar{\mathcal{A}}$, ele tem a forma $G =\ F\ \cup\ Z$ onde $F\ \in\ \mathcal{A}$, eZ é subconjunto de algum conjunto de $\mathcal{Z}$.

4. Mostre que $\bar{\mathcal{A}}$ dada pelos conjuntos G como definidos acima, é uma σ-álgebra, chamada o **completamento** de X respeito de μ.

5. Assim é possível definir $\bar{\mu}$ *em* $\bar{\mathcal{A}}$ por $\bar{\mu}\ (E \ \cup \ Z) \ = \ \mu(E)$. Mostre que $\bar{\mu}$ é uma medida que concide com μ em $\mathcal{A}$. A medida $\bar{\mu}$ chama-se uma medida **completa** e o **completamento** de μ.
   Deste modo, a medida de Lebesgue (ou Borel-Lebesgue) sobre os Borelianos completa-se à medida de Lebesgue numa σ-álgebra que contém os Borelianos.

14. seja $\mu^* \ : \wp(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ a medida exterior de Lebesgue. Mostre que:

(a) se $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $\mu^*(\lambda A) = |\lambda|^n \mu^*(A)$

(b) se $p \in \mathbb{R}^n$ então $\mu^*(A + p) = \mu^*(A)$

(c) Seja $A \subset \mathbb{R}$ tal que $\mu^*(A) = 0$. Significa isto que A é limitado?

(d) Seja $U \subset \mathbb{R}$ aberto. Então $\mu^*(U) = \mu^*(\overline{U})$?

(e) Mostre que a classe $\mathcal{A}$ de $\wp(\mathbb{R}^n)$ dos conjuntos $A \in \mathcal{A}$ com $\mu^*(A) = 0$ ou $\mu^*(A^c) = 0$ é uma σ-álgebra.

15. Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de conjuntos de X associada à medida μ, σ-aditiva. Considere a classe $\mathcal{B}$, dada pelos $E \subset X$ tais que $E \in \mathcal{B}$ se $\exists C, D \in \mathcal{A}$ com $C \subset E \subset D$ e $\mu(C) = \mu(D)$. Neste caso definimos $\bar{\mu}(E) = \mu(C) = \mu(D)$. Mostre que $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra e $\bar{\mu}$ é uma medida σ-aditiva sobre $\mathcal{B}$.

16. Seja X = [0,1] com a σ-álgebra dos borelianos. Prove a seguinte equivalência:

(a) $E \subset X$ é mensurável

(b) Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ um aberto $O \supset E$ com $\mu^*(O \setminus E) < \epsilon$.

(c) Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ um fechado $F \subset E$ com $\mu^*(E \setminus F) < \epsilon$.

(d) $\exists$ G um conjunto $\in \mathsf{G}_\delta$ com $E \subset G$ e $\mu^*(G \setminus E) = 0$.

(e) $\exists$ um conjunto F $\in \mathsf{F}_\sigma$ com $F \subset E$ e $\mu^*(E \setminus F) = 0$.