Lista 6. Processo de Poisson. Aplicações. (sexta 30/10/2020)

Exercício 1*. (2 pontos adicionais) Seja $N(\cdot)$ processo de Poisson com a taxa $\lambda(\cdot)$. Supomos que no intervalo [0,2] a taxa $\lambda(t)$ coincide com a parabola: $\lambda(t) = 4 - t^2$. Seja T_1 o tempo de ocorrência de primeiro evento. Achar

1. a distribuição de T_1 dados que $N(2) = 1$, e esperança dela;
2. a distribuição de T_1 dados que $N(2) = 2$, e esperança dela.

Exercício 2. Seguindo o item anterior, estendemos a função em toda reta

$$\lambda(t) = \begin{cases} 4 - t^2, \ t \in [0,2], \\ 4 - (t-4k)^2, \ k = 1, 2, \dots, \ t \in [4k-2, 4k+2], \end{cases}$$

Seja $N(\cdot)$ processo de Poisson com essa taxa definida $\lambda(t), \ t \geq 0$.

1. Em termos de funções o-pequenos representa a probabilidade de $\mathbb{P}(N(2+h) - N(2) = 1)$.
2. Em termos de funções o-pequenos representa a probabilidade de $\mathbb{P}(N(4+h) - N(4) = 1)$.
3. Consideremos dois incrementos: $X = N(6) - N(2)$ e $Y = N(4)$. Achar covariância $Cov(X,Y)$.

Exercício 3. Sejam $N_1(\cdot)$ e $N_2(\cdot)$ dois processos de Poisson independentes com taxas $\lambda_1(t) = 1 + \sin^2(t)$ e $\lambda_2(t) = 1 + \cos^2(t)$, respectivamente. Prove, que o processo $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ é o processo de Poisson. Achar a taxa do processo. O processo $N(\cdot)$ é processo homogêneo ou não-homogêneo? Achar a covariância $Cov(N(2\pi), N_1(2\pi))$.

Exercício 4. Consideremos processo de Poisson X composto com a taxa λ e com incrementos $Y_i = \pm 1$ com probabilidades 1/2.

1. Achar a probabilidade $\mathbb{P}(X(t) = 0)$.
2. Achar a média $\mathbb{E}(X(t))$.
3. Achar a variância $\mathbb{V}ar(X(t))$.

Exercício 5. Chegadas de e-mails em um distribuidor forma um processo de Poisson $N(t)$ com taxa λ. Cada e-mail vai ser classificado em: *pesado*, se o tamanho dele for maior do que 1Mg, e *leve*, se o tamanho dele menor do que 1 Mg. Os tamanhos (em Mg) dos e-mails são independentes e seguem distribuição exponencial com intensidade 1.

1. Qual é a distribuição do número de e-mails pesados que chegaram até o tempo t, se sabemos que $N(t) = n$?
2. Qual é a distribuição do número de e-mails pesados que chegaram em em intervalo de tempo $(t, t+s)$?
3. Qual é a distribuição do número de e-mails pesados que chegaram em em intervalo $(t, t+s)$, sabendo que $N(t) = n$?

Referências

[1] S.M.Ross *Introduction to probability models.* Ninth Edition, Elsevier, 2007.