Primeira Lista de Exercícios – Macroeconomia IV

Mauro Rodrigues

Departamento de Economia – FEA/USP

1. (Infra-estrutura) O tempo é discreto e indexado por $t \in \{0, 1, 2, ...\}$. Considere uma economia povoada por um grande número de agentes idênticos, distribuídos uniformemente no intervalo $[0, 1]$. A produção é gerada utilizando dois insumos: capital físico (k_t) e infra-estrutura pública (h_t).

   Em cada ponto do tempo, o consumidor representativo recebe a renda do capital (líquida de impostos), alocando-a entre consumo e investimento. Desta forma, a restrição orçamentária em t é:

$$c_t + k_{t+1} \leq (1 - \tau) r_t k_t + \Pi_t$$

   Em que τ é a alíquota de imposto sobre a renda do capital (constante ao longo do tempo), $0 \leq \tau \leq 1$. Além disso, r_t é a taxa de aluguel do capital e Π_t é o lucro da firma representativa. Por simplicidade, o capital deprecia completamente entre dois períodos quaisquer. O governo investe a receita de impostos em infra-estrutura, isto é:

$$h_{t+1} = \tau r_t k_t$$

   Preferências e tecnologia são dadas respectivamente por:

$$U_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t, \quad 0 < \beta < 1$$

$$c_t + k_{t+1} + h_{t+1} = F(k_t, h_t) = A k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}, \quad A > 0$$

   Em que F satisfaz retornos constantes de escala e as condições de Inada. Além disso, $k_0 > 0$ e $h_0 > 0$ são dados.

(a) Escreva o problema do consumidor representativo. Obtenha as condições de ótimo.

Uma firma representativa opera a função de produção F, contratando serviços de capital de modo a maximizar seus lucros (ela não precisa pagar para usar a infra-estrutura pública).

(b) Escreva o problema da firma representativa. Obtenha a condição de primeira ordem.

(c) Defina o equilíbrio competitivo.

Suponha que a economia encontre-se em uma trajetória de crescimento balanceado, ou seja:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{h_{t+1}}{h_t} = 1 + g$$

(d) Explique porque esta economia pode exibir uma taxa de crescimento positiva no longo prazo, mesmo na presença de retornos marginais decrescentes para ambos os insumos.

(e) Calcule a taxa de crescimento g e a razão k/h, em função dos parâmetros desta economia.

(f) Analise como τ afeta g e k/h. Interprete intuitivamente. Calcule a alíquota de imposto τ^* que maximiza a taxa de crescimento.

Agora calcularemos a alocação eficiente dessa economia. Para tanto, resolveremos o problema do planejador central.

(g) Monte o problema do planejador central. Obtenha as condições de ótimo.

(h) Suponha novamente a economia em uma trajetória de crescimento balanceado. Encontre a taxa de crescimento g e a razão k/h do planejador central.

(i) Com base nas expressões encontradas nas partes (f) e (h), encontre a alíquota de imposto que implementa a solução eficiente (i.e., a do planejador central). Como esta alíquota se compara com τ^*, que você encontrou em (f)? Interprete intuitivamente.

2. (Eficiência no modelo de Romer, 1990) Considere o modelo de crescimento de Romer (1990). Em sala mostramos que, em uma trajetória de crescimento balanceado, a taxa de crescimento é dada por:

$$g = \frac{\lambda L \alpha - \rho}{\gamma + \alpha}$$

em que:

λ : parâmetro da função de produção de pesquisa

L : número total de trabalhadores

γ : taxa de aversão relativa ao risco do consumidor representativo

ρ : taxa de impaciência do consumidor representativo

α : parâmetro da função de produção do bem final

(a) Discuta intuitivamente como g varia em função de λ, L, γ e ρ.

Na versão do modelo discutida em sala, supomos uma estrutura de mercado para determinar a taxa de crescimento de longo prazo. Suponha, alternativamente, que o problema seja resolvido por um planejador central, o qual maximiza a utilidade do agente representativo:

$$U_0 = \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{C_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} dt$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\begin{aligned} \dot{K}_t &= Y_t - C_t = (L_{Y,t})^\alpha \int_0^{A_t} x_t(i)^{1-\alpha} di - C_t \\ K_t &= \int_0^{A_t} x_t(i) di \\ \dot{A}_t &= \lambda A_t L_{A,t} \\ L_{A,t} + L_{Y,t} &= L \end{aligned}$$

Em que K_0 e A_0 são dados. Para simplificar o problema, suponha que todos os insumos diferenciados possuem a mesma produção, ou seja, $x_t(i) = \overline{x}_t$.

(b) Encontre as condições de ótimo de planejador central.

Suponha agora uma trajetória de crescimento balanceado, em que:

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\dot{K}_t}{K_t} = \frac{\dot{C}_t}{C_t} = \frac{\dot{A}_t}{A_t} = g^*$$

Além disso, L_A, L_Y e $\overline{x}$ são constantes ao longo do tempo.

(c) Calcule g^* como função dos parâmetros desta economia.

(d) Mostre que $g^* > g$. Interprete intuitivamente.

3. Prove a Proposição 14.3 em Acemoglu (2009).

4. Ljungqvist and Sargent (2nd edition), cap. 8, Problemas 8.2 e 8.9.

5. Considere o modelo de precificação de ativos de Lucas. Especificamente, o tempo é discreto e indexado por $t \in \{0, 1, 2, ...\}$. A economia é composta por um grande número de agentes idênticos, distribuídos uniformemente no intervalo $[0, 1]$. O agente representativo vive para sempre e possui as seguintes preferências sobre a sequência de consumo $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$:

$$U_0 = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma} \right\}$$

Os frutos de uma árvore de Lucas, denotados pela sequência estocástica $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$, constituem o produto desta economia. Em um dado período t, o produto corrente y_t é observável, mas os produtos futuros são incertos. O processo estocástico do produto é iid ao longo do tempo.

Em cada instante t, o agente representativo possui s_t ações da árvore, as quais dão direito a uma fração s_t do produto em t. Esta renda pode ser usada para consumo ou para adquirir novas ações, de modo que a restrição orçamentária no período t seja dada por:

$$c_t + p_t(s_{t+1} - s_t) \leq s_t y_t$$

sendo que p_t é o preço de uma ação da árvore em t. Em equilíbrio $c_t = y_t$ e $s_t = 1$, para todo $t \in \{0, 1, 2, ...\}$.

(a) Escreva o problema do agente representativo na forma recursiva. Calcule as condições de primeira ordem e a equação de Euler.

(b) Defina o equilíbrio competitivo recursivo.

(c) Mostre que, em equilíbrio, o preço da ação no período t é dado por:

$$q_t = \frac{\beta E\{y_{t+1}^{1-\gamma} + y_{t+1}^{-\gamma} p_{t+1}\}}{y_t^{-\gamma}}$$

(d) Com base na expressão da parte (c), mostre que:

$$q_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta^j E(y_{t+j}^{1-\gamma})}{y_t^{-\gamma}} + \lim_{j \to \infty} \frac{\beta^j E(y_{t+j}^{-\gamma} p_{t+j})}{y_t^{-\gamma}}$$

Explique porque o termo limite deve ser zero em equilíbrio.

(e) Suponha que o produto siga uma distribuição log-normal, ou seja:

$$\ln y_t \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Isto implica que $E(y_t) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$. Dado este processo para a renda, calcule p_t em termos de y_t e dos parâmetros desta economia.

(f) Agora suponha que, no período t, o processo da renda torne-se mais produtivo, isto é:

$$\ln y_t \sim N(10\mu, \sigma^2)$$

Em quais circunstâncias o preço da ação aumenta, cai, ou permanece constante? Interprete.