Aula 11 – Cálculo de comprimento de curva

Prof. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Instituto de Matemática e Estatística

MAT1352 – Cálculo para funções de uma variável real II

Objetivo da aula:

Usar integração para calcular o comprimento do gráfico de uma função.

Dedução da fórmula

- Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e de classe C^1 em $]a, b[$.
- Fixado $n \in \mathbb{N}$, fixe $\{x_0, \ldots, x_n\}$ a partição de $[a, b]$ dada por $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$, par $0 \leq i \leq n$.
- Considere $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $y_i = f(x_i)$ e $P_i = (x_i, y_i)$.
- Defina $C_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d(P_i, P_{i-1})$.
- Isto é, $C_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$.
- Note (intuitivamente) que faz sentido definir o comprimento do gráfico da função como $\lim_{n\to\infty} C_n$.

- Colocando $x_i - x_{i-1} = \Delta x$ em evidência, temos
$$C_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}.$$
- Pelo Teorema do Valor Médio, existe $t_i \in]x_{i-1}, x_i[$ tal que $f'(t_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$.
- Logo, $C_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \sqrt{1 + (f'(t_i))^2}$.
- Mas essa é justamente a soma de Riemann da função $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ para a partição etiquetada $(\{x_0, \ldots, x_n\}, (t_1, \ldots, t_n))$.
- Como a função $g(x)$ é integrável (pois é contínua), temos:
- $\lim_{n \to \infty} C_n = \int_a^b g(x)dx$

Teorema 1

Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua em* $[a,b]$ *e de classe* C^1 *em* $]a,b[$*, o comprimento da curva* $y = f(x)$*, para* $a \leq x \leq b$*, é igual a:*

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Exemplo 1

Calcule o comprimento da parábola $y = x^2$ *entre os pontos* $(0,0)$ *e* $(2,4)$.

Exemplo 2

Calcule o comprimento da circunferência de raio 1. Reflita se há algum problema nessa "dedução".

Fim