MAT0315 - Introdução à Análise

Segundo Semestre de 2020
Período Diurno

Martha S. Monteiro

IME-USP

Aula 15 (29/10/2020)

Sequências de números reais - Teorema 5

Toda sequência monótona limitada é convergente.

Na verdade, a demonstração do teorema requer hipóteses menos exigentes: se uma sequência é crescente e limitada superiormente, ou decrescente e limitada inferiormente, então ela é convergente.

Exemplo (Stewart, 11.1, Exercício 69):
Vamos mostrar que a sequência

$$a_1 = 1 \qquad\qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

é convergente e determinar seu limite.

Exercícios

- Mostre que a sequência

$$b_1 = 1 \qquad b_{n+1} = \frac{1}{9}(3b_n + 5), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

é convergente e determine seu limite.

- Determine os termos da sequência

$$x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = 4 - x_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

O número e

Defina $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$a_1 = (1+1)^1 = 2$; $a_2 = \left(1+\dfrac{1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$;

$a_3 = \left(1+\dfrac{1}{3}\right)^{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2{,}\overline{370}$; $\ldots$

$a_{10} = \left(1+\dfrac{1}{10}\right)^{10} \approx 2{,}5937$; $\ldots$; $a_{100} = \left(1+\dfrac{1}{100}\right)^{100} \approx 2{,}7048$; $\ldots$

Existe $\lim a_n$?

Provando-se que a sequência $(a_n)_n$ é crescente e $(a_n)_n$ limitada ($2 \leq a_n \leq 3$ para todo n) podemos concluir, usando o Teorema 5, que o limite dessa sequência existe. <u>Definimos</u> o número e como sendo

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Exercício

Determine $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{10n}\right)^n$

Temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{10n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{10n}\right)^{10n}\right]^{\frac{1}{10}} \\
&\underbrace{=}_{(k=10n)} \lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{\frac{1}{10}} \\
&\underbrace{=}_{T4(*)} \left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{\frac{1}{10}} = e^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{e}
\end{aligned}$$

(*) A função $f(x) = x^{\frac{1}{10}}$ é contínua em $\mathbb{R}^+$

Subsequências

Definição

Dada uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$, considere uma sequência crescente de índices

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

A nova sequência

$$(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots)$$

é chamada uma subsequência de $(a_n)_n$.

Informalmente, uma subsequência é uma nova sequência em que foram escolhidos infinitos termos da sequência original, mas não necessariamente todos.
Observe que a notação para a subsequência indica que seu primeiro termo é o termo de ordem n_1 da sequência original, o segundo termo é o termo de ordem n_2, e assim por diante.

Subsequências - continuação

Por exemplo, considere a sequência

$$(2, 5, 0, 2, 5, 0, 2, 5, 0, \dots)$$

em que $a_n = 2$ para $n = 1, 4, 7, \dots$; $a_n = 5$, para $n = 2, 5, 8, \dots$ e $a_n = 0$, para $n = 3, 6, 9, \dots$

Podemos considerar infinitas subsequências:

- Escolhendo a subsequência formada pelos índices pares, iremos obter

  $$(a_2, a_4, a_6, a_8, \dots) = (5, 2, 0, 5, \dots)$$

  Essa nova sequência pode ser escrita como $(b_k)_k$, sendo $b_k = a_{2k}$, para $k = 1, 2, 3, \dots$
- Escolhendo a subsequência formada pelos índices da forma $n = 3j$, iremos obter

  $$(a_3, a_6, a_9, a_{12}, \dots) = (0, 0, 0, 0, \dots)$$

  Essa é a subsequência $(a_{3j})_j$, $j = 1, 2, 3, \dots$

Subsequências- continuação

Observe que, em qualquer subsequência tem-se $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 2 \ldots$.
Em geral, $n_k \geq k$, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$.
Por exemplo, dada uma sequência $(x_n)_n$, podemos tomar a subsequência

$$(x_1, x_2, x_3, x_7, x_{11}, x_{15}, \ldots)$$

Neste caso, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$, $n_4 = 7 > 4$, $n_5 = 11 > 5$, etc.

Subsequências- continuação

Teorema 6

Se uma sequência $(a_n)_n$ converge para um limite L então qualquer subsequência $(a_{n_k})_k$ converge para L.

Demonstração: Como $\lim a_n = L$, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe um índice n_0 tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon, \ \ \forall n > n_0.$$

Se $k > n_0$, como $n_k > k$, então $n_k > n_0$. Portanto,

$$|a_{n_k} - L| < \varepsilon, \ \ \forall k > n_0,$$

o que garante que a subsequência $(a_{n_k})_k$ converge para L.

Subsequências - continuação

Voltemos ao exemplo da sequência $(a_n)_n$

$$(2, 5, 0, 2, 5, 0, 2, 5, 0, \dots)$$

Podemos criar a subsequência $(b_k)_k$, sendo $b_k = a_{3k}$. Obteremos a subsequência $(0, 0, 0, \dots)$ e $\lim b_k = 0$
Também podemos criar a subsequência $(c_k)_k$, sendo $c_k = a_{3k-1}$. Obteremos a subsequência

$$(a_2, a_5, a_8, \dots) = (5, 5, 5, \dots)$$

e $\lim c_k = 5$.
Como conseguimos duas subsequências com limites distintos, podemos concluir, pelo Teorema 6, que a sequência $(a_n)_n$ não tem limite.