

CARTEIRAS ÓTIMAS DE RISCO

CARTEIRAS ÓTIMAS DE RISCO

- Diversificação e carteiras de risco:
 - Tipos de risco:
 - Proveniente das condições macroeconômicas da economia e que afetam todas as empresas, indistintamente;
 - Proveniente de características específicas das empresas ou do risco intrínseco ao setor ou ao negócio em que a empresa está inserida.



CARTEIRAS ÓTIMAS DE RISCO

- Diversificação e carteiras de risco:
 - Diversificação: procedimento usual utilizado em mercado financeiro para minimizar o risco específico das empresas;
 - Trata-se do princípio de diversificação em carteiras de ativo de risco ou ainda o princípio de imunização.



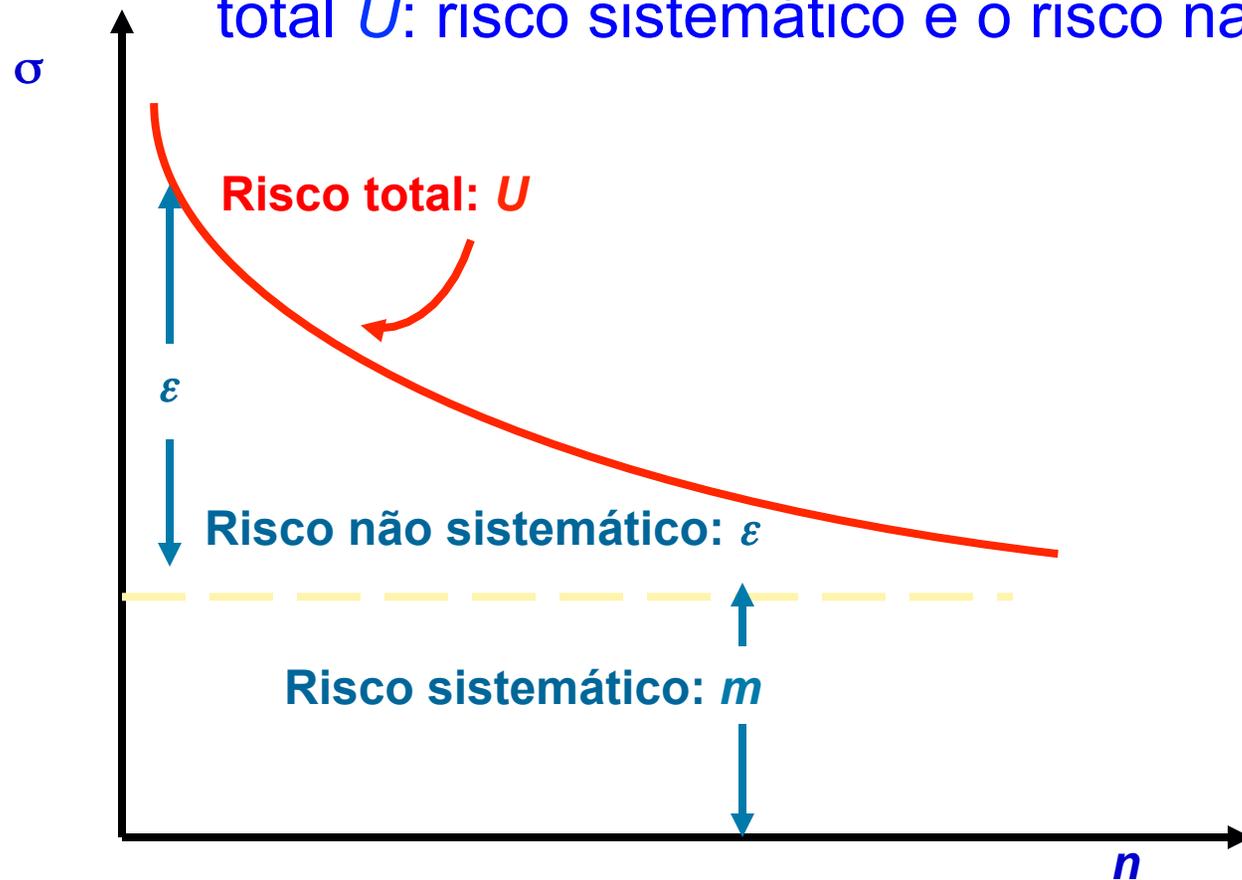
CARTEIRAS DE RISCO ÓTIMAS

- Fatores do risco:
 - Mesmo que os fatores comuns de risco afetem todas as empresas na economia, uma imunização plena não é capaz de eliminá-los por completo;
 - O risco que ainda permanece, mesmo após uma extensiva imunização é denominado risco de mercado, que é atribuído a fatores de risco gerais em mercado. Essa fonte de risco é ainda conhecida por risco sistemático ou risco não diversificável;
 - Por outro lado, o risco passível de imunização é chamado risco não sistemático ou risco diversificável.



FATORES DE RISCO: SISTEMÁTICO E NÃO SISTEMÁTICO

É possível representar os dois componentes do risco total U : risco sistemático e o risco não sistemático.



DIVERSIFICAÇÃO EFICIENTE: DOIS ATIVOS DE RISCO

○ Diversificação eficiente:

- Construção de carteiras de risco que contenham o menor risco possível, dado um certo nível de retorno desejado;
- Relação clara entre diversificação, alocação de ativos em carteiras de investimento e redução do risco.



DIVERSIFICAÇÃO EFICIENTE: DOIS ATIVOS DE RISCO

- Vamos admitir uma carteira que seja formada apenas por dois ativos;
- Definição:
 - Vamos admitir que uma proporção w_B do volume total de recursos de um investidor seja alocada em fundo de títulos de dívida. O restante $(1-w_B)$ é investido em um fundo de ações.



DIVERSIFICAÇÃO EFICIENTE: DOIS ATIVOS DE RISCO

- A taxa de retorno dessa carteira r_p é calculada da seguinte forma:

$$r_p = w_B r_B + w_S r_S$$

- O retorno esperado da carteira é uma média ponderada dos retornos dos dois fundos que a compõem:

$$E(r_p) = w_B E(r_B) + w_S E(r_S)$$



DIVERSIFICAÇÃO EFICIENTE: DOIS ATIVOS DE RISCO

- A medida de risco, expressa pela variância dos retornos dos ativos componentes da carteira, é dada pela seguinte expressão:

$$\sigma_p^2 = w_B^2 \sigma_B^2 + w_S^2 \sigma_S^2 + 2w_B w_S \text{Cov}(r_B, r_S)$$

- O risco da carteira, ao contrário do retorno, não é uma média ponderada das variâncias individuais dos ativos inseridos na carteira.



DIVERSIFICAÇÃO EFICIENTE: DOIS ATIVOS DE RISCO

$$\begin{bmatrix} w_B & w_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Cov}(r_B r_B) & \text{Cov}(r_B r_S) \\ \text{Cov}(r_S r_B) & \text{Cov}(r_S r_S) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_B \\ w_S \end{bmatrix}$$

$$W' \Omega W$$



DIVERSIFICAÇÃO EFICIENTE: DOIS ATIVOS DE RISCO

- Sabemos que:

$$Cov(r_B, r_S) = \rho_{B,S} \sigma_B \sigma_S$$

- Logo:

$$\sigma_p^2 = w_B^2 \sigma_B^2 + w_S^2 \sigma_S^2 + 2w_B w_S \sigma_B \sigma_S \rho_{B,S}$$

- Quanto maior a correlação entre os dois ativos, maior o risco da carteira. No caso especial em que o coeficiente de correlação for positivo e igual a um, temos o seguinte:



DIVERSIFICAÇÃO EFICIENTE: DOIS ATIVOS DE RISCO

- O risco da carteira é igual à média ponderada dos riscos dos ativos que a constituem:

$$\sigma_P = w_B \sigma_B + w_S \sigma_S$$

- Ativos de *hedge*:
 - Ativos, cujas correlações com o outro ativo, ou com os demais ativos em uma carteira de investimento, são negativas.
- Então, as carteiras cujos ativos são correlacionados de forma não perfeita e negativa oferecem oportunidades de risco-retorno superiores a investimentos individuais.



DIVERSIFICAÇÃO EFICIENTE: DOIS ATIVOS DE RISCO

- Quando o coeficiente de correlação entre os dois ativos aqui admitidos for negativo e perfeito, podemos estabelecer uma situação de hedge perfeito:

$$w_B \sigma_B - w_S \sigma_S = \sigma_p = 0$$

- Então:

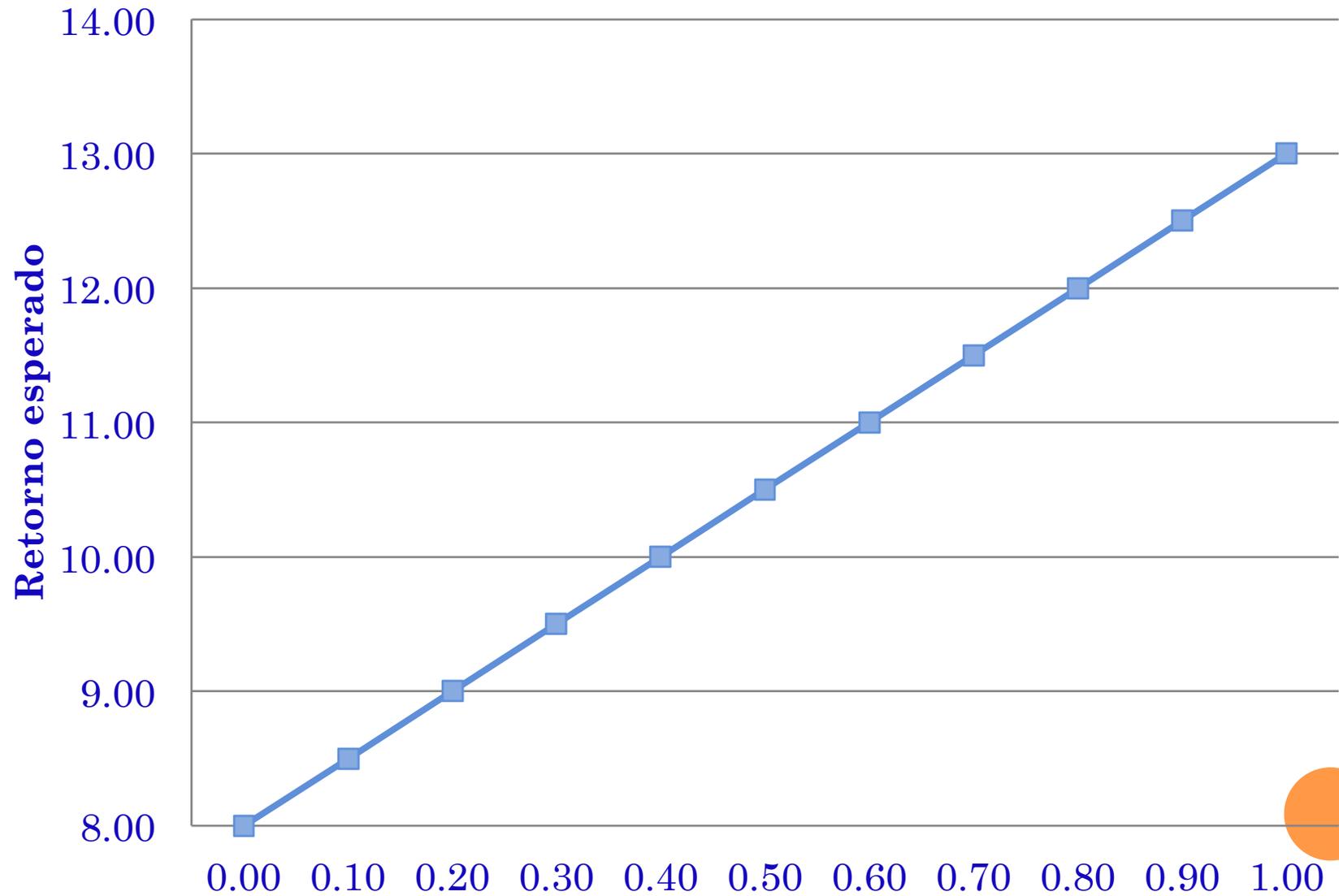
$$w_B = \frac{\sigma_S}{\sigma_B + \sigma_S}$$

$$w_S = \frac{\sigma_B}{\sigma_B + \sigma_S}$$



w_B	w_S	$E(r_p)$	$\rho = -1$	$\rho = 0$	$\rho = 0,3$	$\rho = +1$
0,00	1,00	13,00	20,00	20,00	20,00	20,00
0,10	0,90	12,50	16,80	18,04	18,40	19,20
0,20	0,80	12,00	13,60	16,18	16,88	18,40
0,30	0,70	11,50	10,40	14,46	15,47	17,60
0,40	0,60	11,00	7,20	12,92	14,20	16,80
0,50	0,50	10,50	4,00	11,66	13,11	16,00
0,60	0,40	10,00	0,80	10,76	12,26	15,20
0,70	0,30	9,50	2,40	10,32	11,70	14,40
0,80	0,20	9,00	5,60	10,40	11,45	13,60
0,90	0,10	8,50	8,80	10,98	11,56	12,80
1,00	0,00	8,00	12,00	12,00	12,00	12,00

Retorno esperado da carteira como uma proporção do investimento em ações



ESTRATÉGIAS POSSÍVEIS

- Se $w_B > 1$ e $w_S < 0$, então a estratégia de gestão da carteira consiste em vender ações a descoberto e investir os recursos adquiridos por essa operação em títulos;
- No entanto, se $w_B < 0$ e $w_S > 1$, a estratégia é reversa, pois o gestor da carteira deve vender títulos a descoberto e investir os recursos em ações.



PROCEDIMENTO DE ALOCAÇÃO DE ATIVOS

- A carteira de risco ótima composta de dois ativos de risco e um ativo livre de risco:
 - Títulos de dívida;
 - Ações;
 - Letra do tesouro nacional, com retorno certo e risco muito baixo.



PROCEDIMENTO DE ALOCAÇÃO DE ATIVOS

- Iniciamos por inserir a reta de alocação de ativos em um gráfico do retorno esperado contra o risco;
- Mantendo o retorno esperado do ativo livre de risco, podemos traçar várias retas de alocação dos ativos de risco;
- A inclinação da reta de alocação dos ativos é denominada razão retorno-risco de Sharpe.



PROCEDIMENTO DE ALOCAÇÃO DE ATIVOS

- Razão retorno-risco de Sharpe:

$$S_{PA} = \frac{E(r_A) - r_f}{\sigma_A}$$

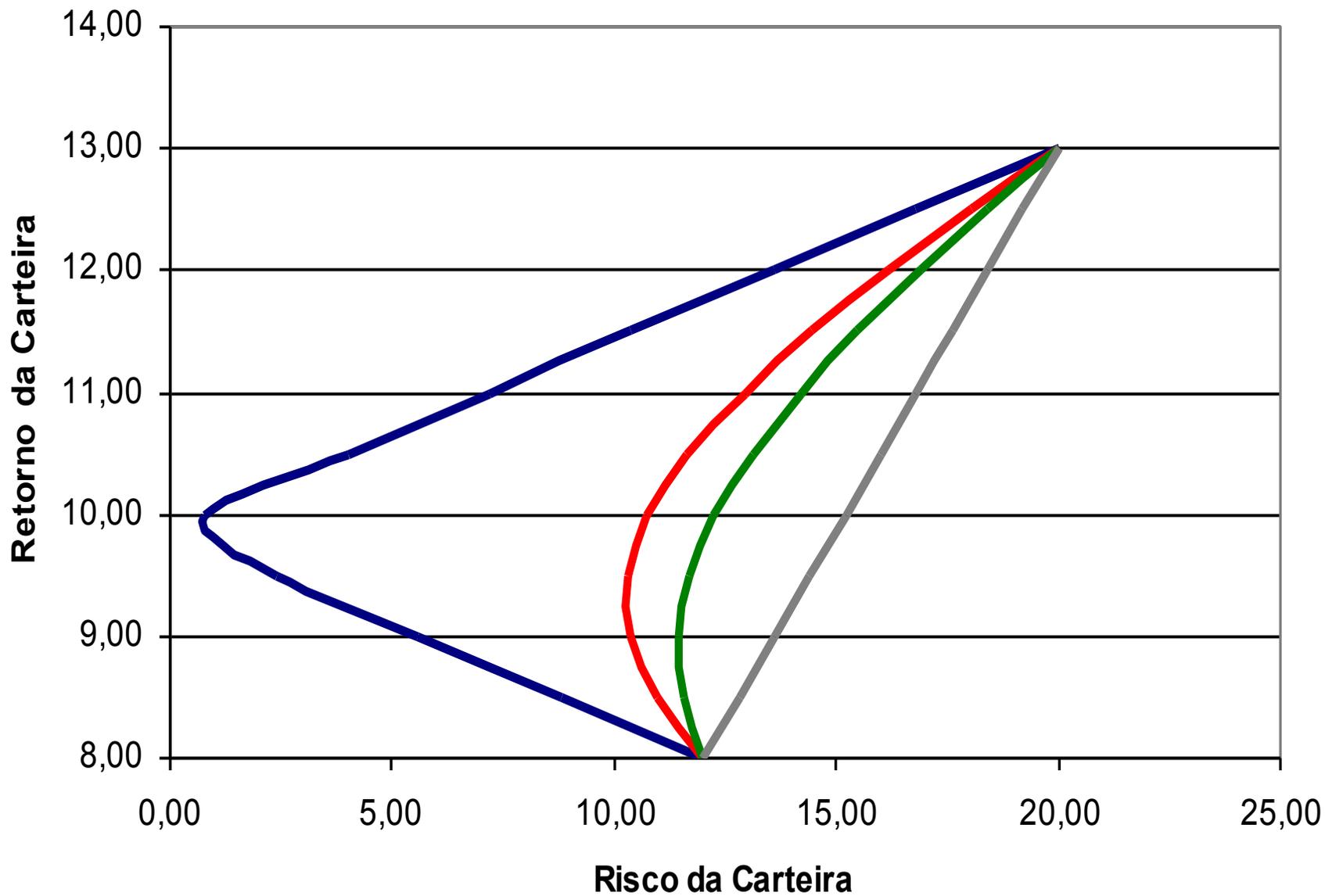
- Vamos admitir uma carteira A com 82% dos recursos investidos em títulos e 18% em ações. O retorno esperado é igual a 8,90% para um nível de risco de 11,45%;
- Então a razão de Sharpe é igual a 0,34.



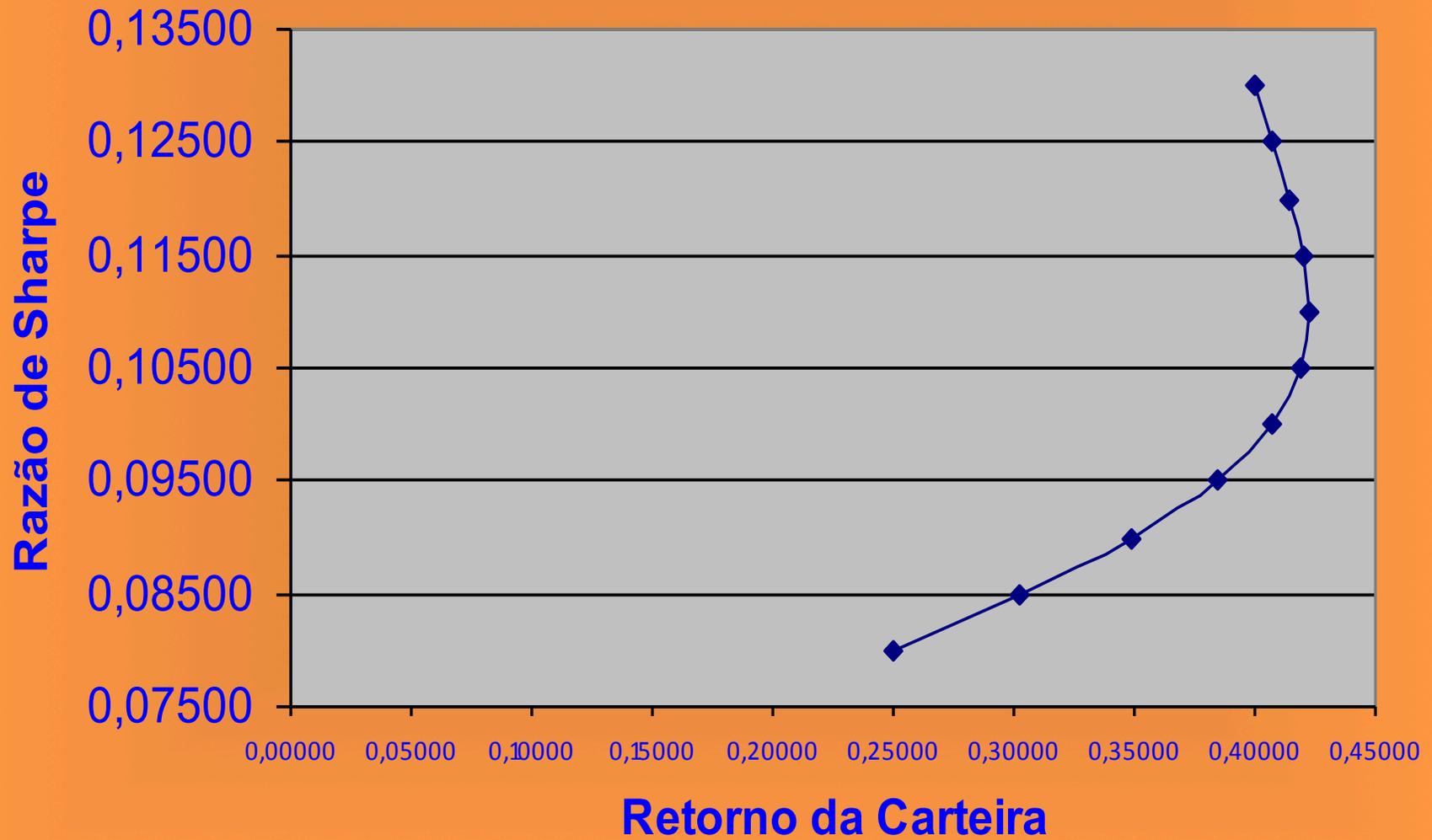
w_S	w_B	R_S	R_B	$E(r_p)$	σ_p	<i>Sharpe</i>
0,00	1,00	13,00	8,00	8,00	12,00	0,250
0,10	0,90	σ_S	σ_B	8,50	11,56	0,303
0,20	0,80	20,00	12,00	9,00	11,45	0,349
0,30	0,70	$Cov(R_S, R_B)$	$\rho_{S,B}$	9,50	11,70	0,385
0,40	0,60	72,00	0,30	10,00	12,26	0,408
0,50	0,50	$R_f = 5\%$		10,50	13,11	0,419
0,60	0,40			11,00	14,20	0,423
0,70	0,30			11,50	15,47	0,420
0,80	0,20			12,00	16,88	0,415
0,90	0,10			12,50	18,40	0,408
1,00	0,00			13,00	20,00	0,400
0,18	0,82			8,90	11,45	0,341

Alocação de ativos: risco e retorno

	Retorno	Risco	Correlação	Covariância	
Ativo 1	0,08	0,12	0,30	0,01	
Ativo 2	0,13	0,20			
Ativo F	0,05	0,00			
Pesos 1	Pesos 2		Retorno esperado	Risco	Razão de Sharpe
1,00	0,00		0,08000	0,12000	0,25000
0,90	0,10		0,08500	0,11559	0,30281
0,80	0,20		0,09000	0,11454	0,34922
0,70	0,30		0,09500	0,11696	0,38474
0,60	0,40		0,10000	0,12264	0,40771
0,50	0,50		0,10500	0,13115	0,41937
0,40	0,60		0,11000	0,14199	0,42258
0,30	0,70		0,11500	0,15466	0,42027
0,20	0,80		0,12000	0,16876	0,41479
0,10	0,90		0,12500	0,18396	0,40771
0,00	1,00		0,13000	0,20000	0,40000



Razão de Sharpe



MODELO DE MARKOWITZ

- Seleção ótima dos ativos:
 - Procedimento preliminar de escolha dos ativos que vão compor a carteira de investimento desejada;
 - Identificação das combinações risco-retorno disponíveis a partir de um conjunto de ativos financeiros dados.



MODELO DE MARKOWITZ

- Seleção ótima dos ativos:
 - Identificar a carteira de risco eficiente, por meio da solução do problema de maximização da razão de Sharpe, encontrando os pesos ótimos;
 - Finalmente, escolher o melhor portfólio completo misturando o ativo livre de risco à carteira de risco ótima preliminar.



MODELO DE MARKOWITZ

- Propriedade da separação:
 - O problema da escolha da carteira de risco ótima pode ser separado em duas fases independentes:
 - Na primeira fase, a determinação da carteira de risco ótima é uma tarefa puramente técnica;
 - Isto é, dadas as informações para todos os ativos de risco, a carteira ótima é a mesma para todos investidores, independentemente do grau de aversão ao risco.



MODELO DE MARKOWITZ

- Propriedade da separação:
 - O problema da escolha da carteira de risco ótima pode ser separado em duas fases independentes:
 - Na segunda fase, entretanto, a alocação final entre o ativo livre de risco e a carteira de risco depende do grau de aversão ao risco dos investidores.



MODELO DE MARKOWITZ

- Limites à diversificação:
 - Vamos admitir o caso em que todos os termos na diagonal principal da matriz de variâncias e covariâncias sejam idênticos;
 - Todos os termos fora da diagonal principal da mesma matriz, as covariâncias, também sejam idênticos;
 - A variância da carteira é a soma total dos termos da matriz de variâncias e covariâncias.



MODELO DE MARKOWITZ

- Limites à diversificação:
 - Uma matriz de variâncias e covariâncias representativa da situação em que uma carteira contenha N ativos tem dimensão N^2 ;
 - Há N termos de variâncias na sua diagonal principal;
 - Logo, $(N^2 - N)$ termos em covariâncias fora da diagonal principal da mesma.



MODELO DE MARKOWITZ

- Limites à diversificação:
 - Há N termos na diagonal principal da matriz de variâncias e covariâncias e N(N-1) termos fora da diagonal da mesma;
 - A soma de todos esses termos pode ser expressa da seguinte forma:

$$Var(p) = N\left(\frac{1}{N^2}\right)\overline{\text{var}} + N(N-1)\left(\frac{1}{N^2}\right)\overline{\text{cov}}$$



MODELO DE MARKOWITZ

- Limites à diversificação:

$$Var(p) = \left(\frac{1}{N}\right) \overline{\text{var}} + \left(\frac{N^2 - N}{N^2}\right) \overline{\text{cov}}$$

$$Var(p) = \left(\frac{1}{N}\right) \overline{\text{var}} + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \overline{\text{cov}}$$



MODELO DE MARKOWITZ

- Limites à diversificação:
 - Vamos admitir que o número de ativos na carteira cresça sem limites, de tal forma que a variância da carteira seja igual à covariância entre dois ativos quaisquer, desde que $N \rightarrow \infty$;
 - Resultados:
 - As variâncias individuais desaparecem à medida que o número de ativos na carteira cresce;
 - No entanto, o termo covariado permanece, tornando-se a variância da carteira;
 - Logo, as variâncias individuais podem ser totalmente diversificadas, enquanto as covariâncias nunca.



MODELO DE MARKOWITZ

- O risco de um ativo qualquer pode, então, ser decomposto da seguinte forma:

$$\overline{\text{var}} = \overline{\text{cov}} + \left(\overline{\text{var}} - \overline{\text{cov}} \right)$$



MODELO DE MARKOWITZ

- Decomposição do risco de um ativo:
 - O risco que o investidor toma por adquirir um ativo qualquer é chamado de risco total;
 - Por outro lado, o risco que o mesmo investidor toma por manter um investimento em uma determinada carteira é denominado risco da carteira, proveniente da diversificação:
 - Também conhecido por risco sistemático ou risco de mercado.



MODELO DE MARKOWITZ

- Decomposição do risco de um ativo:
 - Por fim, resta ao investidor o risco que pode ser diversificado até o limite máximo da diversificação:
 - Risco diversificável, risco único ou ainda risco não sistemático;
 - Trata-se do risco marginal de um ativo ao risco da carteira.



Ativos	Pesos	$\rho = 0$		$\rho = 0,4$	
		Risco	Redução no risco	Risco	Redução no risco
N	(%)	(%)		(%)	
1	100,00	50,00	14,64	50,00	8,17
2	50,00	35,36	13,00	41,83	
5	20,00	22,36	1,95	36,06	0,70
6	16,67	20,41	4,60	35,36	
10	10,00	15,81	0,73	33,91	0,20
11	9,09	15,08		33,71	
20	5,00	11,18	0,27	32,79	0,06
21	4,76	10,91		32,73	
100	1,00	5,00	0,02	31,86	0,00
101	0,99	4,98		31,86	