Lista 11 - Regra da Cadeia

(1) Sejam $f(x,y) = sen xy$, $x(t) = 3t$ e $y(t) = t^2$.

Considere a função $z(t) = f(x(t), y(t))$.

(i) Calcule $z'(t)$ diretamente.

(ii) Calcule $z'(t)$ usando a regra da cadeia.

(2) Seja $z = f(x,y)$ uma função de classe C^1 tal que $f(2,1) = 4$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -2$. Considere a função $g(t) = t^2 f(2t^2, 3t^3 - 2)$. Calcule $g'(1)$.

(3) Seja $z = f(x,y)$ uma função diferenciável tal que $f(2,1) = 4$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -1$. Sabe-se que $\gamma(t) = (2t, t^2, z(t))$ é uma curva cujo traço está contido no gráfico de f. Determine a reta tangente à curva γ no ponto $\gamma(1)$.

(4) Sabe-se que $z = f(x,y)$ é uma função diferenciável tal que

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que a função $g(t) = f(t, \frac{2}{t})$, $\forall\, t > 0$, é constante.

(5) Seja $z = f(x,y)$ uma função diferenciável tal que

$f(t^2 + 2t, 4 - t^3) = 2t + 3t^4$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Sabe-se que $\frac{\partial f}{\partial x}(3,3) = 1$.

Calcule $\frac{\partial f}{\partial y}(3,3)$ e o plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(3, 3, f(3,3))$.

(6) A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável e a função $z = g(x,y)$ é diferenciável. Sabe-se também que $f(1) = 2$, que $\frac{\partial g}{\partial x}(1,2) = 3$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(1,2) = 5$ e que $g(t, f(t)) = 4$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Determine a reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(1, f(1))$.

(7) Seja $z = f(x,y)$ uma função diferenciável, e considere a função $g(u,v) = f(u - v, v - u)$. Verifique que $\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} = 0$.

(8) Seja $z = f(x,y)$ uma função diferenciável, e considere $g(u,v) = f(\frac{u}{v}, \frac{v}{u})$. Verifique que $u.\frac{\partial g}{\partial u} + v.\frac{\partial g}{\partial v} = 0$.