Estabilidade no Espaço de Estados (EE)

- RELAÇÃO E.E. E FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA (FT)
- SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES NO EE
- MATRIZ DE TRANSIÇÃO E MATRIZ RESOLVENTE
  - ✓ Propriedades
- TERMO FORÇANTE
- SOLUÇÃO NUMÉRICA
- EXEMPLO

Espaço de Estados e FTs

- Relação E.E. e Funções de Transferência (FT)
  - Aplicando a Transformada de Laplace com condições iniciais nulas no SLIT:

$$\left\{\begin{array}{ll} sX = AX + BU & (1) \\ Y = CX + DU & (2) \end{array}\right\} U = \text{entrada}; \quad \text{Y} = \text{saída}$$

$$\text{Rearranjando (1)}: (sI - A)X = BU$$

$$\therefore X = (sI - A)^{-1}BU$$

$$\text{Pondo em (2)}:$$

$$\text{Y} = \big[\underbrace{\text{C}(sI - A)^{-1}B + D}\big]U$$

G(s)=Matriz de FTs

$$G(s) = \left[\text{C}(sI - A)^{-1}B + D\right]$$

Estabilidade no EE

$$G(s) = \left[C(sI - A)^{-1}B + D\right]$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{Adj(sI - A)}{|sI - A|}$$

$|sI - A| = \det(sI - A) = 0 \Rightarrow$ Equação característica

$\Rightarrow$ raízes são os autovalores $\equiv$ polos do sistema.

Para estabilidade os autovalores devem ter parte real negativa:

$\Rightarrow$ polos devem estar no semi-plano esquerdo no plano complexo.

Para sistemas MIMO, $G(s)$ é uma matriz de FTs, com dimensão determinada por C e B.

Todas as FTs têm a mesma equação característica!!!

Solução da ED no EE: Matriz de Transição

- Caso escalar:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \qquad x(0) = x_0$$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$sX(s) - x_0 = aX(s) + bU(s)$$

$$\therefore X(s) = \frac{x_0}{(s-a)} + \underbrace{\frac{1}{(s-a)}}_{G_1(s)} \cdot \underbrace{bU(s)}_{G_2(s)}$$

Transformada inversa (tabela de transformadas):

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau)d\tau$$

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} \cdots\cdots + \frac{a^kt^k}{k!}$$

- **Caso *Multivariável*:**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax(t)} + \mathbf{Bu(t)}, \qquad \mathbf{x(0)} = \mathbf{x_0}$$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$\mathbf{X(s)} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x_0} + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU(s)}$$

Aplicando a transformada inversa e usando a analogia com o caso escalar:

$$\mathbf{x(t)} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{x_0} + \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

onde:

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} \cdots = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \equiv \mathbf{\Phi}(t) = \text{matriz de transição.}$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{\Phi}(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\left((s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right)\right]$$

$$\mathbf{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \rightarrow \text{matriz resolvente.}$$

Propriedades da Matriz de Transição

$\Phi(\Delta t)$ tem todas as propriedades de $e^{A\Delta t}$

$$a)\ \dot{\Phi}(\Delta t) = A\Phi(\Delta t)$$

$$\Phi(\Delta t) = e^{A\Delta t} \Rightarrow \dot{\Phi}(\Delta t) = Ae^{A\Delta t} = A\Phi(\Delta t)$$

$$b)\ \Phi(0) = I = e^{A.0}$$

$$c)\ \Phi^{-1}(\Delta t) = e^{-A\Delta t} = e^{A(-\Delta t)} = \Phi(-\Delta t)$$

$$d)\ \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0)$$

$$\Phi(t_2 - t_0) = e^{A\Delta t} = e^{A(t2-t0)} = e^{A(t2-t1+t1-t0)}$$

$$= e^{A(t2-t1)}e^{A(t1-t0)} = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0)$$

$$e)\ \Phi(t+\tau) = e^{A(t+\tau)} = e^{A(t)}e^{A(\tau)} = \Phi(t)\Phi(\tau)$$

$$f)\ \Phi(t)\Phi(\tau) = \Phi(\tau)\Phi(t)$$

$$g)\ \Phi^{q}(t) = \Phi(t)\Phi(t)\Phi(t)\cdots = e^{At}e^{At}e^{At}\cdots = e^{A(t+t+t+\cdots)}$$

$$= e^{Aqt} = \Phi(qt)$$

Solução numérica pela Matriz de Transição

$Dado:$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax(t)} + \mathbf{Bu(t)}, \qquad \mathbf{x(0)} = \mathbf{x_0}$$

A solução analítica é:

$$\mathbf{x(t)} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{x_0} + \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

$onde:$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t + \frac{\mathbf{A}^2\Delta t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3\Delta t^3}{3!} \cdots = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathbf{A}^k\Delta t^k}{k!} = \mathbf{\Phi}(\Delta t)$$

$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \equiv \mathbf{\Phi}(\Delta t) =$ matriz de transição para um intervalo de tempo Δt.

$$\Rightarrow \mathbf{x(t)} = \mathbf{\Phi}(\Delta t)\mathbf{x_0} + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

O termo de convolução para $\mathbf{u(\tau)} = \mathbf{u} = \mathbf{c\underline{te}}$ no intevalo $\Delta t = t - 0$ é:

$$\underbrace{\left(\int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)d\tau\right)}_{\mathbf{\Gamma}(\Delta t)}\mathbf{Bu} = \mathbf{\Gamma}(\Delta t).\mathbf{B}.\mathbf{u}$$

Solução numérica pela Matriz de Transição

$$\boldsymbol{\Gamma}(\Delta t) = \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)d\tau = \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)}d\tau = \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}\theta}d\theta$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(\Delta t) = \int_0^t \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}\theta + \frac{\mathbf{A}^2\theta^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3\theta^3}{3!} \cdots \right) d\theta$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(\Delta t) = \left(\mathbf{I}\theta + \frac{\mathbf{A}\theta^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^2\theta^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^3\theta^4}{4!} \cdots \right)\Bigg|_0^t$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(\Delta t) = \Delta t \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}\Delta t}{2!} + \frac{\mathbf{A}^2\Delta t^2}{3!} + \frac{\mathbf{A}^3\Delta t^3}{4!} \cdots \right) = \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbf{A}^k \Delta t^k}{(k+1)!}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x(t)} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbf{A}^k \Delta t^k}{k!} \right)\mathbf{x_0} + \left(\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbf{A}^k \Delta t^k}{(k+1)!} \right)\mathbf{Bu}$$

obs: Se $\mathbf{A}$ for inversível, tem-se ainda:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\Phi} - \mathbf{I})$$

Exercício para casa:

- 1) Determine numericamente a matriz de transição e a matriz dos termos forçantes expandindo as série de Taylor do slide 11 até o quarto termo, para 20 intervalos de tempo de 0,2 s cada para o seguinte sistema sujeito a uma entrada degrau unitário e fazendo o gráfico de saída para $\boldsymbol{x_1}$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \mathrm{u}$$

Transformações Lineares (TL)

- *Não alteram características do sistema:*
  - *Se é estável, permanece estável sob uma TL.*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\text{seja}: x = Tz$$

$$T\dot{z} = ATz + Bu \qquad (1)$$

$$y = CTz$$

$$\text{multiplicar (1) por } T^{-1} \text{ a esquerda}:$$

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu$$

$$y = CTz$$

$$\text{e definindo}: T^{-1}AT = \Lambda; T^{-1}B = \Gamma; CT = \theta$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \Lambda z + \Gamma u \\ y = \theta z \end{cases}$$

A e Λ: mesmos autovalores

Estabilidade no E.E.

A estabilidade de um sistema independe de sua entrada, isto é, a estabilidade é uma característica do sistema. A mudança do sinal de entrada não altera esta característica e se ele for estável para um sinal limitado será estável para qualquer outro sinal limitado. Assim a estabilidade pode ser verificada apenas pela parte não forçada da solução (a solução homogênea):

$$x(t) = \Phi(\Delta t)x_o = e^{A\Delta t}$$

Se usarmos uma transformação linear $\boldsymbol{T}$, cujas matriz cujas colunas sejam os autovetores (matriz modal) do sistema é possível mostrar que a matriz transformada $\Lambda = T^{-1}AT$ será uma matriz diagonal onde os autovalores comparecem na diagonal principal:

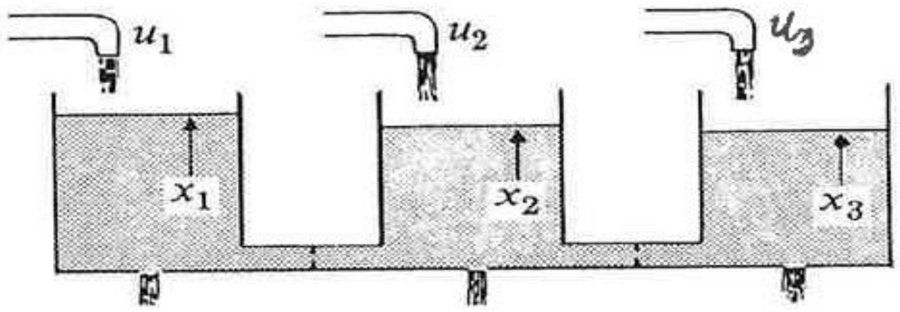
$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow z(t) = e^{\Lambda\Delta t}$$

$$\lambda_k = \alpha_k + \beta_k j$$
$$e^{\beta j} = cos\beta + jsen\beta$$

$$\Rightarrow todos\ \ autovalores\ devem\ ter\ parte\ real\ \alpha\ negativa\ para\ estabilidade.$$

$$Obs.: A\ e\ \Lambda\ mesmos\ autovalores!$$

Exercício 2:



$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

a) Determine os autovalores;
b) Verifique a estabilidade;
c) Determine os autovetores v_i: $Av_i = \lambda_i v_i$
d) Monte a matriz modal *T*;
e) Determine a matriz $\Lambda = T^{-1}AT$
f) Ache a matriz de transição para a matriz A e simule o sistema numericamente para uma entrada degrau apenas no tanque 1 (u2=u3=0), e as condições iniciais $x_1=x_2=x_3= 1$, (use os intervalos de tempo que julgar necessário). Faça um gráfico para $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$

Excesso de simetria