

MECÂNICA LAGRANGIANAFUNCIONAL SOBRE CURVAS

ESPAÇOS DE CURVAS:

~~DE CURVAS~~

$$C([a, b], \mathbb{R}^n)$$

CONJUNTO DAS CURVAS CONTÍNUAS
DO INTERVALO $[a, b]$ EM $\mathbb{R}^n$.
COM A NORMA DO SUP.

$$\forall \gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$$

$$\|\gamma\| = \max_{t \in [a, b]} \|\gamma(t)\|$$

→ $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ É UM ESPAÇO VETORIAL NORMADO
E COMPLETO. ESPAÇO DE BANACH.- ~~o~~ FUNCIONAL (AQUI NESTA AULA)
FUNÇÃO DE UM ESPAÇO DE CURVAS EMIR.
OBJETIVO INICIAL IDENTIFICAR OS PONTOS
DE MÁXIMO, MÍNIMO DESTES FUNCIONAIS

OUTRO ESPAÇO DE CURVAS.

(2)

$C^1([a, b], \mathbb{R}^N) =$ ESPAÇO DAS FUNÇÕES
 C^1 DE $[a, b]$ EM $\mathbb{R}^N$

$C^k([a, b], \mathbb{R}^N)$ — ESPAÇO DAS FUNÇÕES C^k
 $[a, b]$ EM $\mathbb{R}^N$
 $k \in \mathbb{N}$

$C^\infty([a, b], \mathbb{R}^N)$ — ESPAÇO DAS FUNÇÕES C^∞
 DE $[a, b]$ EM $\mathbb{R}^N$

DEFINIMOS P/ $C^k([a, b], \mathbb{R}^N)$ A NORMA:

$$\|\gamma\|_k = \max_{0 \leq i \leq k} \left\{ \max_{a \leq t \leq b} \|\gamma^{(i)}(t)\| \right\}.$$

$\gamma^{(i)}$ É A i -ÉSIMA
 DERIVADA DE γ .

P/ O CASO C

DEFINIMOS A TOPOLOGIA:

$\gamma_n \rightarrow \bar{\gamma}$ SE, PARA TODO i .

$\gamma_n^{(i)} \rightarrow \bar{\gamma}^{(i)}$ UNIFORMEMENTE.

ESPAÇOS DE CURVAS COM EXTREMOS FIXOS. (3)

• $C^k([a, b], \mathbb{R}^N, x_0, x_1)$ ONDE $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^N$.

$\gamma \in C^k([a, b], \mathbb{R}^N, x_0, x_1)$ SE $k \in \mathbb{N}$ e $\gamma \in C^k([a, b], \mathbb{R}^N)$.

• $\gamma \in C^k([a, b], \mathbb{R}^N)$.

• $\gamma(a) = x_0, \gamma(b) = x_1$.

SE $\gamma_1, \gamma_2 \in C^k([a, b], \mathbb{R}^N, x_0, x_1) =$

ENTÃO
 $\gamma_1 - \gamma_2 \in C^k([a, b], \mathbb{R}^N, \vec{0}, \vec{0}) \equiv C_0^k([a, b], \mathbb{R}^N).$

OUTROS EXEMPLOS RELEVANTES:

$C^k([a, b], \mathcal{O}),$ aonde $\mathcal{O}$ é um
ABERTO DO $\mathbb{R}^N$.

FUNÇÕES:

FUNÇÕES CONTÍNUAS DE ALGUM ESPAÇO EM $\mathbb{R}$.

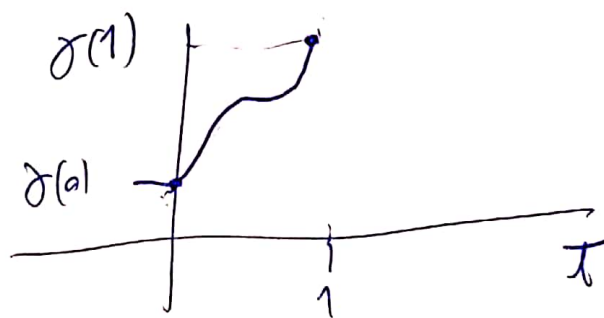
(9)

EXEMPLO 1:

$$C^1([0,1], \mathbb{R}).$$

$$\Phi(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + \gamma'(x)^2} dx.$$

Φ ASSOCIA, A CADA γ , O COMPRIMENTO DA GRÁFICA DE γ .



$$\Gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

$$\Gamma(x) = (x, \gamma(x)).$$

$$\Gamma'(x) = (1, \gamma'(x)).$$

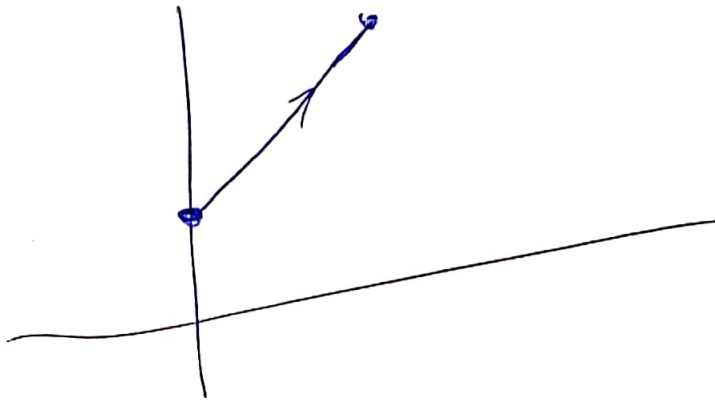
$$\begin{aligned} \text{Comprimento de } \Gamma &= \int_0^1 \|\Gamma'\| dx = \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + \gamma'(x)^2} dx. \end{aligned}$$

CONSIDERE O SEGUINTE PROBLEMA DE MÁXIMOS (5)
E MÍNIMOS.

DADOS x_0, x_1 , ENCONTRAR.

$\gamma \in C^1([0,1], \mathbb{R}, x_0, x_1)$ QUE MINIMIZA.

Φ



OUTRO PROBLEMA:

$X = C^1([0,1], \mathbb{R}^2)$. DEFINIR.

$\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}$. POR.

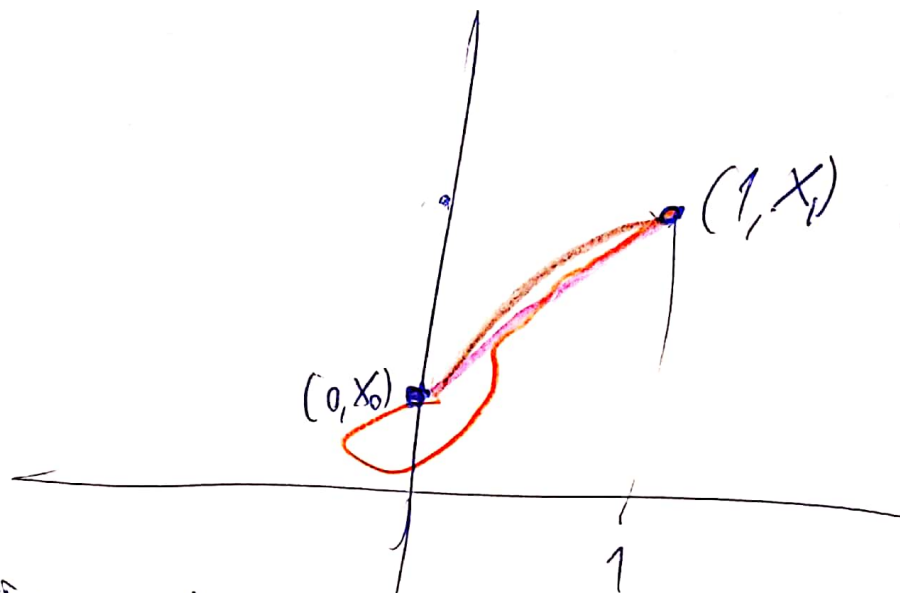
$$\Phi(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)} dt$$

Φ ASSOCIÀ A CADA CURVA O SEU COMPRIMENTO
PARA MEDIR.
(IMAGEM).

PROBLEMA:

ENCONTRAR ~~EM~~ EM

$C^1([0,1], \mathbb{R}^2, (0, x_0), (1, x_1))$ O "PONTO"
DE MÍNIMO DE



• FUNCIONAIS EM $C^k([a,b], \mathbb{R}^N)$ SÃO ASSOCIADAS
A PROBLEMAS DE EXTREMOS LIVRES.

FUNCIONAIS EM $C^k([a,b], \mathbb{R}^N, x_0, x_1)$ SÃO
ASSOCIADOS A PROBLEMAS DE EXTREMOS
FIXOS.

PR RUDIMENTOS DE CÁLCULO.

(7)

TEMOS (INGREDIENTES).

$$\Omega \subset C^k([a, b], \mathbb{R}^N).$$

ABERTO.

(*)

$$\Omega \in C^k([a, b], \mathbb{R}^N, x_0, x_1) \quad (**).$$

É ABERTO

$$\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \Omega.$$

DIFERENCIAL DE Φ EM x_0 .

$$\text{SITUAÇÃO 1: } \Omega \subset C^k([a, b], \mathbb{R}^N).$$

ENTÃO SABEMOS QUE $\exists \epsilon > 0$ TAL QUE.

$$\text{SE } \|h\| < \epsilon, \quad x_0 + h \in \Omega.$$

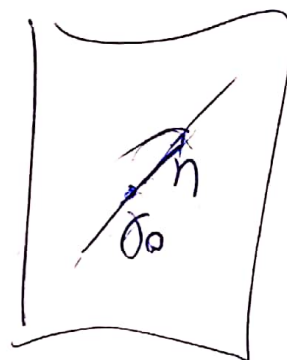
FALAMOS QUE

T É A DIFERENCIAL DE Φ EM
 γ_0 . SE SE VALER QUE.

(8)

$$(1) \forall h \in C^k([0,1], \mathbb{R}^n) \text{ SE } \delta = \frac{\epsilon}{\|h\|}$$

$$g_h: [\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R} \\ g_h(s) = \Phi(\gamma_0 + s h).$$

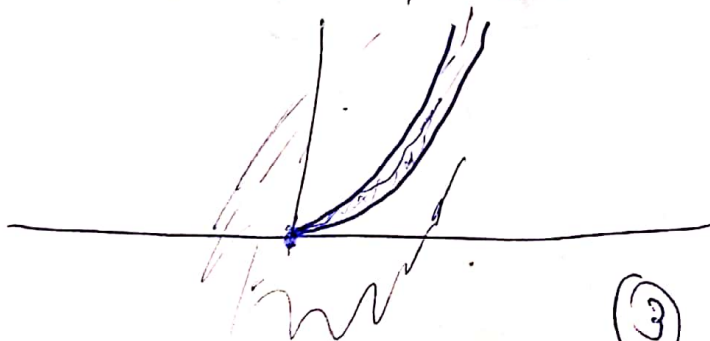


ENTÃO

$$g_h'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g_h(s) - g_h(0)}{s} \text{ EXISTE E É IGUAL A}$$

$$T(h).$$

$$(2) T: C^k([0,1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} \text{ É UMA FUNÇÃO LINEAR.}$$



(3)

ALÉM DISSO, ~~PODE-SE~~ EM ALGUNS CASOS PERCEBER:

$$(3) \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\Phi(x_0+h) - \phi(x_0) - T(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad (9)$$

NO CASO (**)

~~PARA~~ RESTRINGIMOS

$$T: C^k([a,b], \mathbb{R}^m)$$

PONTO IMPORTANTE:

SE x_0 É UM PONTO DE MÍNIMO ^{LOCAL} DE Φ .

~~ENTÃO $\Phi'(x_0) = 0$ SATISFAZ (1): E~~

Φ TEM DIFERENCIAL EM x_0 , ENTÃO
A DIFERENCIAL É NULA.

LEMA!

(10)

SEJA $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. FUNÇÃO CONTÍNUA.

SE, PARA TODA $g \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ TEMOS QUE

$$\int_a^b f(s)g(s)ds = 0 \quad \text{ENTÃO } f(s) \equiv 0.$$

DEM: ~~SEJA~~ SEJA f TAL QUE, PARA TODA $g \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$,

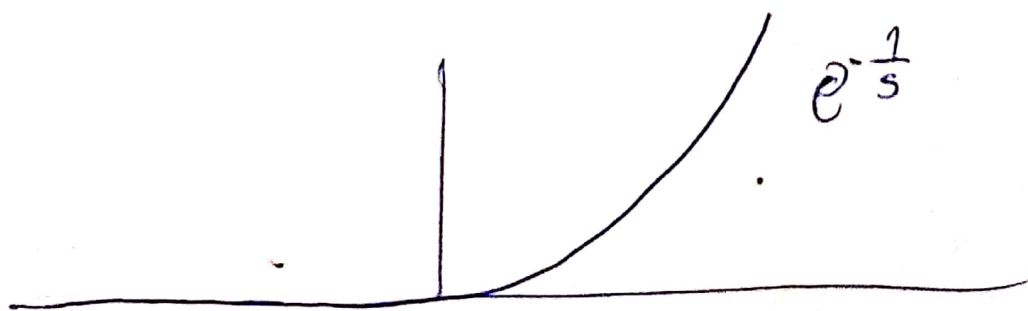
$$\int_a^b f(s)g(s)ds = 0. \quad \text{SUPONHA, POR CONTRADIÇÃO,$$

QUE f NÃO É CONSTANTEMENTE NULA.

ENTÃO $\exists \tau_0 \in [a, b]$ TAL QUE.

f NÃO SE ANULA EM $[\tau_0 - \epsilon, \tau_0 + \epsilon]$.

$$\text{SEJA } \psi(s) = \begin{cases} 0 & \text{SE } s \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{s}} & \text{SE } s > 0 \end{cases}$$



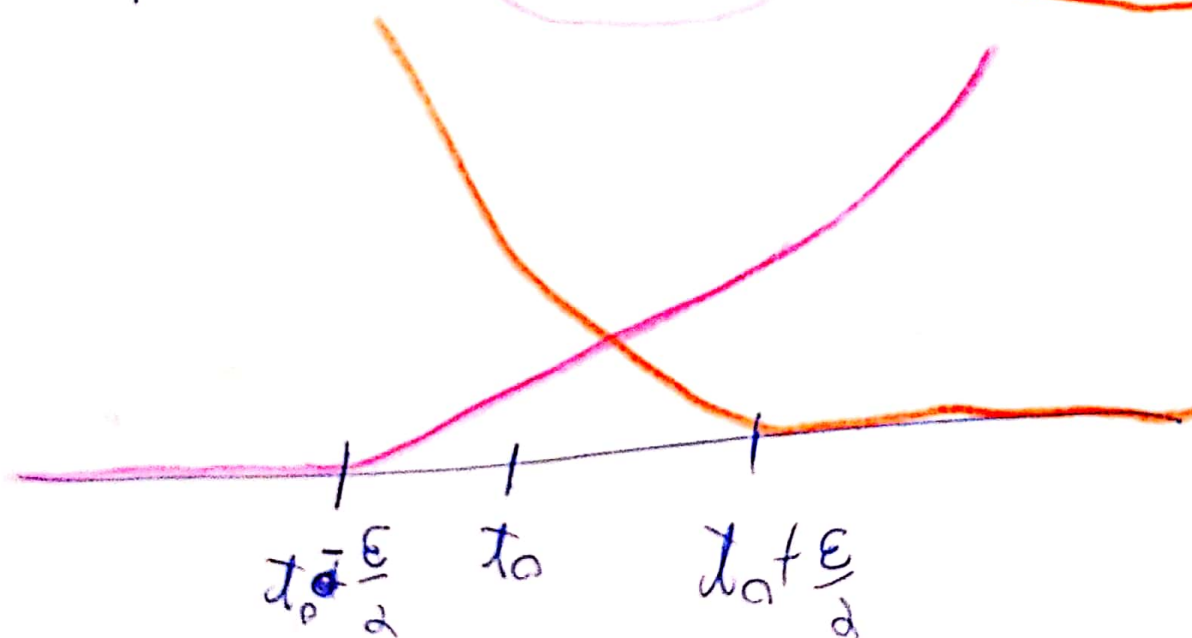
ψ É UMA FUNÇÃO C^∞ E VALE QUE:

(11)

$$\psi^{(N)}(0) = 0.$$

DEFINO AGORA $h(s) =$

$$h(s) = \psi(s - t_0 + \frac{\epsilon}{2}) \cdot \psi(t_0 + \frac{\epsilon}{2} - s).$$



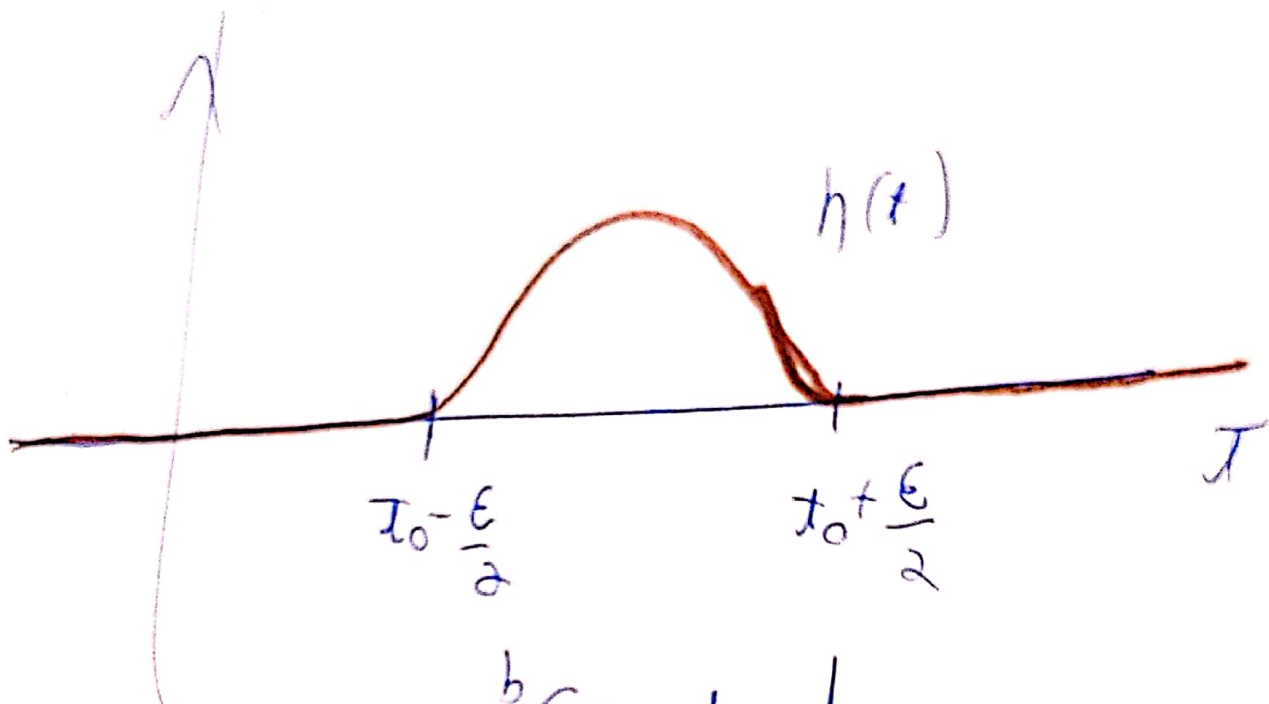
$h \in C^\infty$

$$(2) \quad h(s) = 0 \quad \text{SE} \quad s \leq t_0 - \frac{\epsilon}{2} \quad \text{OU} \quad s \geq t_0 + \frac{\epsilon}{2}.$$

$$(3) \quad h(s) > 0 \quad \text{SE} \quad t_0 - \frac{\epsilon}{2} < s < t_0 + \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo

(2)



PORTANTO $\int_a^b f(s)h(s)ds =$

$= \int_{t_0 - \frac{\epsilon}{2}}^{t_0 + \frac{\epsilon}{2}} f(s)h(s)ds \neq 0.$

CONTÍNUA,
NÃO SE ANULA.
CONTRADIÇÃO.

SEJA $L: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ UMA FUNÇÃO
 C^2 . DEFINIMOS O FUNCIONAL.

$\mathcal{I}_L: C^1([0,1], \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ POR.

$$\Phi_L(x) =$$

$$\int_a^b L(x(t), \dot{x}(t), t) dt.$$

ENTÃO

Φ_L É DIFERENCIÁVEL EM TODA x .

~~Exemplo~~ EN $C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ É SUA.
DIFERENCIAL É DADA POR

$$T(h) = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x(s), \dot{x}(s), s) \cdot h(s) - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(s), \dot{x}(s), s) \cdot h(s) \right) \right] ds$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(s), \dot{x}(s), s) \cdot h(s) \Big|_{s=a}^b$$

$$O = (x(s), \dot{x}(s), s).$$

(14)

$$J(h) =$$

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] h \, dt +$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot h \right|_{t=a}^b$$

DEMONSTRATION :

$$\Phi_L(x + \varepsilon h) - \Phi_L(x) =$$

$$\int_a^b L(x + \varepsilon h, \dot{x} + \varepsilon \dot{h}, t) - L(x, \dot{x}, t) \, dt =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x} \cdot \varepsilon h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \varepsilon \dot{h} \, dt =$$

$$= \varepsilon \left(\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x} \cdot \eta \, dx + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \dot{\eta} \, dx \right) = 15$$

$$= \varepsilon \left(\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x} \cdot \eta - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \cdot \eta \, dx \right) +$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \eta \right|_{x=a}^x=b$$

CO RO CÁRIO!

SE γ_0 É UM PONTO DE MÍNIMO LOCAL
DE ϕ EM $C^k([a, b], \mathbb{R}^n, \gamma_0(a), \gamma_0(b))$

ENTÃO VAL É QVE.

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0.}$$