EACH

Escola de Artes, Ciências e Humanidades
da Universidade de São Paulo

Cálculo II:
Derivadas parciais de 2ª ordem

ACH 4553 Cálculo II - Marketing

Prof. Andrea Lucchesi

A2W

Agenda

1. Derivada parcial de 2ª ordem

Referência:

Cap 10:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

1. Derivada parcial de 2ª ordem

- Seja **f(x,y)** e as derivadas parciais em relação a x e em relação a y dadas, respectivamente, por:

$$f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad | \, y \; constante \qquad\qquad f_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \quad | \, x \; constante$$

- As derivadas parciais de f_x e f_y são chamadas **derivadas parciais de 2ª ordem** e indicadas por:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

=> Derivada mista

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

=> Derivada mista

1. Derivada parcial de 2ª ordem *(continuação)*

- **Exemplo 1**: Seja $f(x,y) = xy^3 + 5xy^2 + 2x + 1$. Calcule as derivadas parciais de 2ª ordem

$$f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y^3 + 5y^2 + 2$$

$$f_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3xy^2 + 10xy$$

- As derivadas parciais de f_x e f_y são chamadas **derivadas parciais de 2ª ordem** e indicadas por:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 0$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 6xy + 10\,x$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 3y^2 + 10y$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 3y^2 + 10y$$

1. Derivada parcial de 2ª ordem *(continuação)*

- **Exemplo 2**: Seja $f(x,y) = \frac{x}{y} + \sqrt{x^2 + y^2}$. Calcule as derivadas parciais de 2ª ordem

$$f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1.y - x.0}{y^2} + \frac{1}{2}.(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}.2x = \frac{1}{y} + x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{0.y - x.1}{y^2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}.2y = \frac{-x}{y^2} + y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

- As derivadas parciais de 2ª ordem de f_x são:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 0 + 1\,(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + \mathrm{x}(-\frac{1}{2})\,(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}.2\mathrm{x} = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2} + 0(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + x(-\frac{1}{2})(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}.2y = -\frac{1}{y^2} - xy(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

1. Derivada parcial de 2ª ordem *(continuação)*

- **Exemplo 2**: Seja $f(x,y) = \frac{x}{y} + \sqrt{x^2+y^2}$. Calcule as derivadas parciais de 2ª ordem$(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1y - x.0}{y^2} + \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}.2x = \frac{1}{y} + x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{0y - x.1}{y^2} + \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}.2y = \frac{-x}{y^2} + y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

- As derivadas parciais de 2ª ordem de f_y são:

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3} + 1\,(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} + \mathrm{y}(-\tfrac{1}{2})\,(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}.2\mathrm{y} = \frac{2x}{y^3} + (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} - y^2(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{y^2} + 0(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} + \mathrm{y}(-\tfrac{1}{2})(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}.2x = -\frac{1}{y^2} - xy(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

1. Derivada parcial de 2ª ordem *(continuação)*

- **Exemplo 3**: Seja a função produção $Q(K, L) = 60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$, sendo $K_0 = 90.000$ e $L_0 = 1.000$. Calcule a derivada parcial de 2ª ordem da função produção em relação ao trabalho: f_{LL} e interprete o resultado.

$$f_L = \frac{\partial Q(K,L)}{\partial L} = \frac{1}{3}.60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{-2}{3}} = 20K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{-2}{3}}$$

$f_L \cong \frac{\Delta Q}{\Delta L}$ => taxa de variação da produção em relação ao trabalho, ou seja, como o sinal de f_L é positivo indica que quando L aumenta em uma unidade, Q aumenta em $20K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{-2}{3}}$ unidades (mantendo K constante)

- considerando $K_0 = 90.000$ e $L_0 = 1.000$:

$$f_L = \frac{\partial Q(K,L)}{\partial L} = 20(90.000)^{\frac{1}{2}}(1000)^{\frac{-2}{3}} = 20.300.\left(\frac{1}{100}\right) = 60 \cong \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

Quando L aumenta em uma unidade, mantendo K constante, Q aumenta em 60 unidades.

1. Derivada parcial de 2ª ordem *(continuação)*

- **Exemplo 3**: Seja a função produção $Q(K, L) = 60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$, sendo $K_0 = 90.000$ e $L_0 = 1.000.$
  Calcule a derivada parcial de 2ª ordem da função produção em relação ao trabalho: f_{LL} e interprete o resultado.

$$f_{LL} = \frac{\partial^2 Q(K,L)}{\partial L^2} = -\frac{2}{3}.20K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{-5}{3}} = -\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{K}^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}\boldsymbol{L}^{\frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{3}}}$$

$f_{LL} \cong \frac{\Delta f_L}{\Delta L}$ => taxa de variação da taxa de variação da produção em relação ao trabalho, ou seja, taxa de variação de f_L em relação ao trabalho. Como o sinal de f_{LL} é negativo, indica que a taxa de variação de Q, em relação a L, ocorre **a taxas decrescentes**. (mantendo K constante)

- considerando $K_0 = 90.000$ e $L_0 = 1.000$:

$$f_{LL} = \frac{\partial^2 Q(K,L)}{\partial L^2} = -\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{3}}(\mathbf{90.000})^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}(\mathbf{1000})^{\frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{3}}} = -\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{3}}.300.(1/100000) = \mathbf{-0{,}04}$$

A cada unidade adicional de L, Q aumenta 0,04 unidades a menos do que a unidade adicional anterior. (mantendo K constante).

1. Derivada parcial de 2ª ordem *(continuação)*

- **Exemplo 3**: Seja a função produção $Q(K,L) = 60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$, sendo $K_0 = 90.000$ e $L_0 = 1.000.$ Calcule a derivada parcial de 2ª ordem da função produção em relação ao trabalho: f_{LL} e interprete o resultado.

K	L	Q	$f_L \approx \Delta Q/\Delta L$	$f_{LL} \approx \Delta f_L/\Delta L$
90.000	1.000	180.000		
90.000	1.001	180.059,98	59,98/1	
90.000	1.002	180.119,92	59,94/1	-0,04/1
90.000	1.003	180.179,82	59,90/1	-0,04/1
90.000	1.004	180.239,68	59,86/1	-0,04/2

1. Derivada parcial de 2ª ordem *(continuação)*

- **Exemplo 4**: Seja a função produção Q(K, L). Qual a interpretação do sinal da derivada parcial de 2ª ordem

$$f_{LL}=\frac{\partial^2 Q(K,L)}{\partial L^2}\ ?$$

- Suponha que $f_L = \frac{\partial Q(K,L)}{\partial L} > 0$

=> *ou seja, quando L aumenta, Q tb aumenta ou seja, a produtividade marginal do trabalho é positiva. (mantendo K constante)*

- Possíveis cenários:

a) $f_{LL} > 0 \;\Rightarrow$ produtividade marginal do trabalho aumenta quando L aumenta. Ou a quantidade produzida aumenta a taxas crescentes quando o número de trabalhadores aumenta (mantendo K constante).

b) $f_{LL} < 0 \;\Rightarrow$ produtividade marginal do trabalho diminui quando L aumenta. Ou a quantidade produzida aumenta a taxas decrescentes quando o número de trabalhadores aumenta (mantendo K constante). (*Essa é a situação comumente verificada na prática).*

c) $f_{LL} = 0 \;\Rightarrow$ produtividade marginal do trabalho aumenta a taxas constantes.

1. Derivada parcial de 2ª ordem *(continuação)*

- **Exemplo 4**: Seja a função produção $Q(K, L)$. Qual a interpretação do sinal da derivada parcial de 2ª ordem

$$f_{LL} = \frac{\partial^2 Q(K,L)}{\partial L^2} \;?$$

- Suponha que $f_L = \frac{\partial Q(K,L)}{\partial L} < 0$

=> *ou seja, quando L aumenta, Q diminui ou seja, a produtividade marginal do trabalho é negativa. (mantendo K constante)*

- Possíveis cenários:

a) $f_{LL} > 0 \Rightarrow$ produtividade marginal do trabalho aumenta quando L aumenta. Ou a quantidade produzida diminui a taxas decrescentes quando o número de trabalhadores aumenta (mantendo K constante).

b) $f_{LL} < 0 \Rightarrow$ produtividade marginal do trabalho diminui quando L aumenta. Ou a quantidade produzida diminui a taxas crescentes quando o número de trabalhadores aumenta (mantendo K constante).

c) $f_{LL} = 0 \Rightarrow$ produtividade marginal do trabalho diminui a taxas constantes.