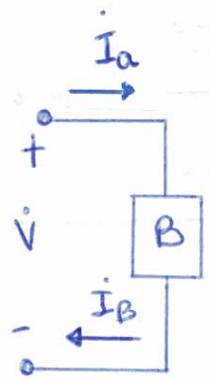
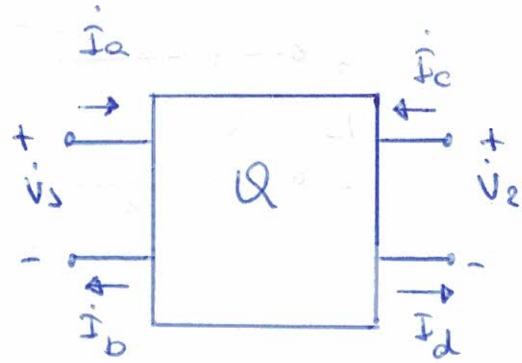
Quadripolos



Bipolo

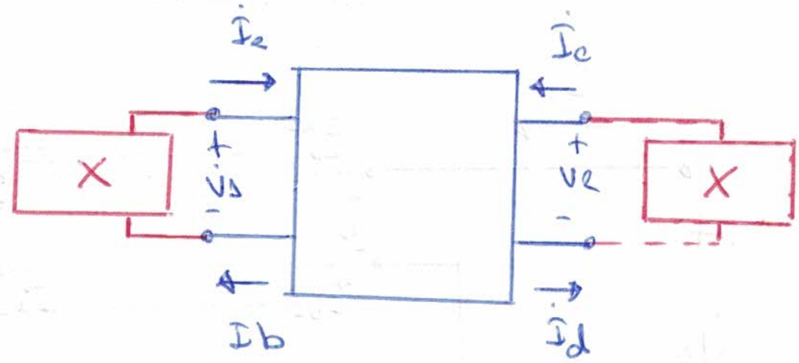
$\dot{I}_a = \dot{I}_b$



Quadripolo

* as correntes em cada par de terminais devem ser iguais!

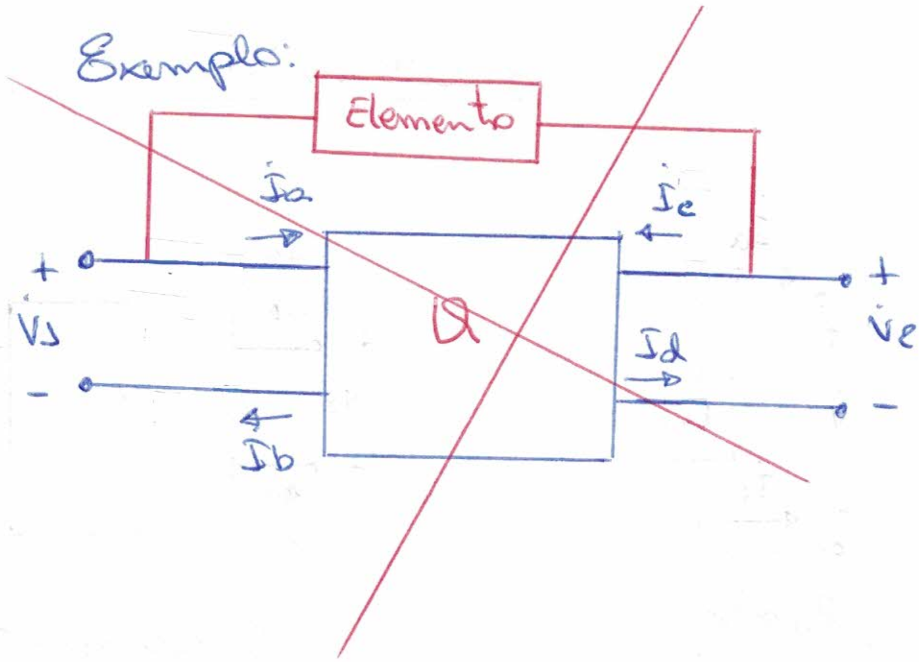
* integridade do quadripolo!



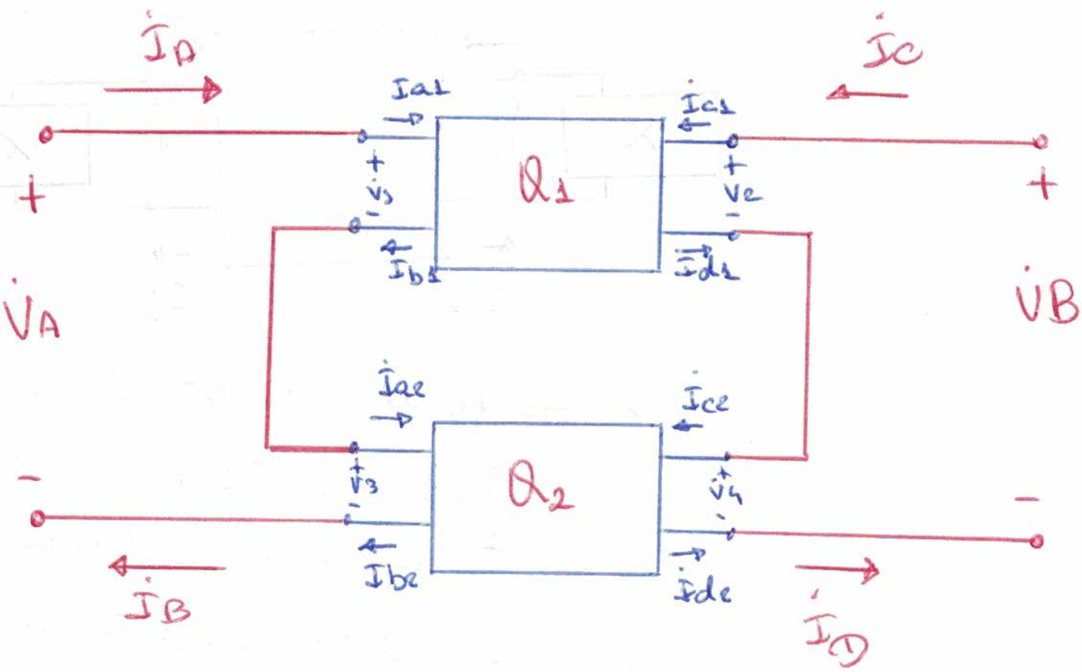
X → fontes e cargas devem ser conectados diretamente entre os dois terminais de entrada ou saída!

Conclusão: cada par de terminais pode ser conectado apenas a um bipolo ou a um par de terminais pertencente a outra rede multi-portos (por ex., quadripolo).

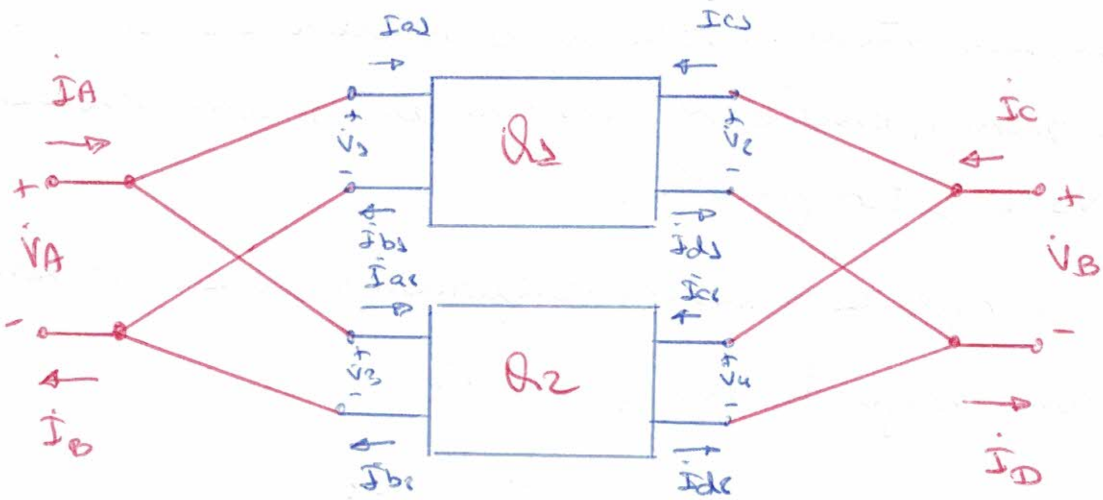
Exemplo:



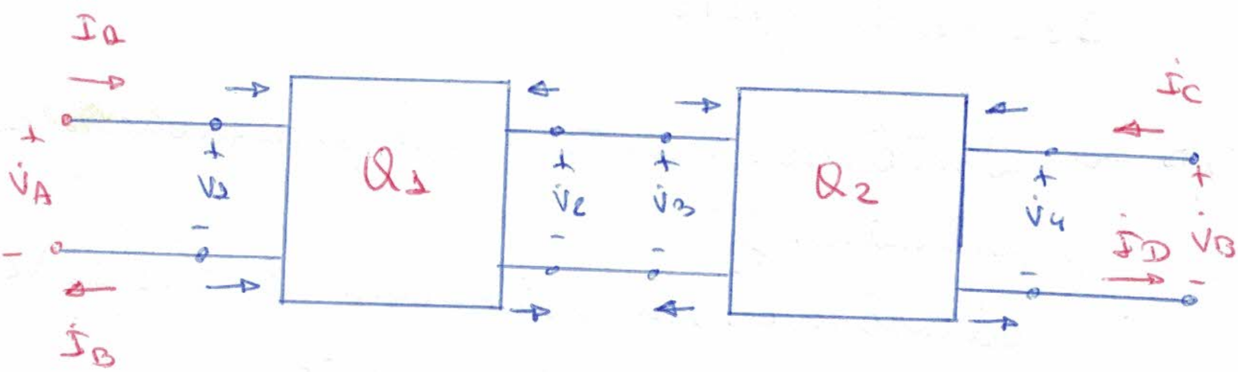
* Quadripolo: possui somente elementos lineares e não contem fontes independentes, mas fontes dependentes são permitidos!



Associação série!

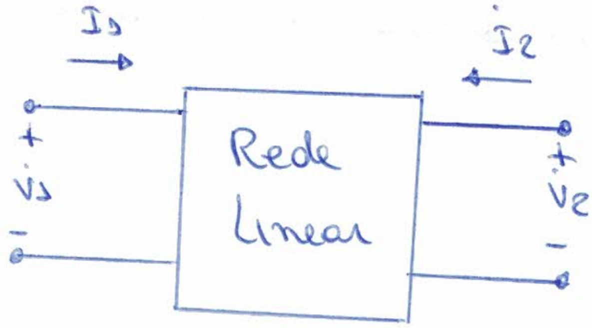


Associação em paralelo!



Associação/Rede em cascata!

* <u>Parâmetros de Admitância</u>



* Como a rede é linear e não contém fontes independentes em seu interior, pode-se considerar $\dot{I}_1$ como sendo a superposição de dois componentes, um causado por $\dot{V}_1$ e outro por $\dot{V}_2$.

Isto se aplica o mesmo argumento em $\dot{I}_2$, podemos ter um conjunto de equações:

Excitações → Entradas do quadripolo: $\dot{V}_1$ e $\dot{V}_2$

Respostas → Saídas " " : $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$

$$\dot{I}_1 = y_{11}\dot{V}_1 + y_{12}\dot{V}_2$$

$$\dot{I}_2 = y_{21}\dot{V}_1 + y_{22}\dot{V}_2$$

y's → admitâncias (constantes de proporcionalidade)

parâmetros y

admitâncias em curto-circuito ($\dot{V}_1$ ou $\dot{V}_2 = 0$)

parâmetros em curto circuito

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}}_{\text{matriz quadrada dos parâmetros y}} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}$$

Inspeção direta das equações → maneira útil e informativa de atribuir um sentido físico aos parâmetros y!

$\dot{I}_1 = y_{11}\dot{V}_1 + y_{12}\dot{V}_2$ p/ $\dot{V}_2 = 0$ (curto-circuito no terminal 2)

$\dot{I}_1 = y_{11}\dot{V}_1 \therefore y_{11} = \dfrac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1} \therefore \boxed{y_{11} = \left.\dfrac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{V}_2=0}}$

y_{11} → admitância de curto-circuito da entrada

Assim:

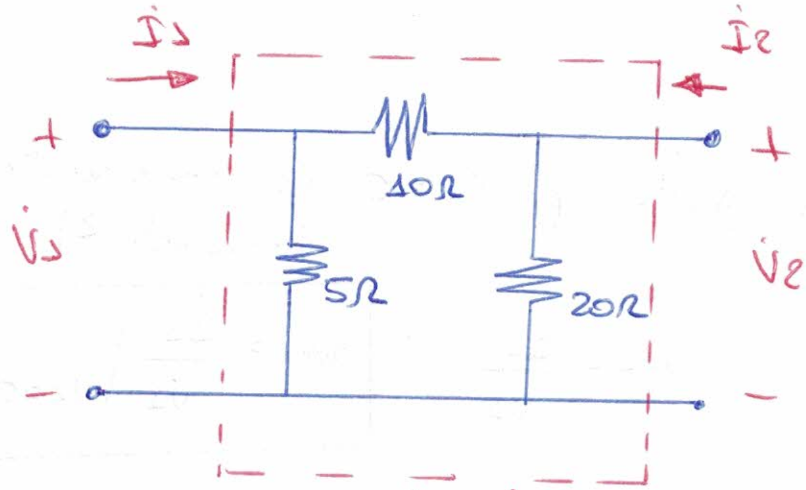
$$y_{11} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{V}_2=0} \qquad y_{12} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{V}_1=0}$$

$$y_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{V}_2=0} \qquad y_{22} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{V}_1=0}$$

y_{12} e y_{21} → admitâncias de transferência em curto-circuito

y_{22} → admitância de curto-circuito da saída

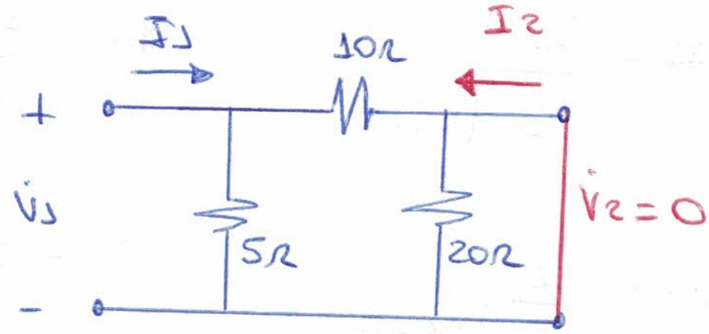
Exemplo: Determine os parâmetros de curto-circuito para o quadripolo resistivo dado.



Quadripolo

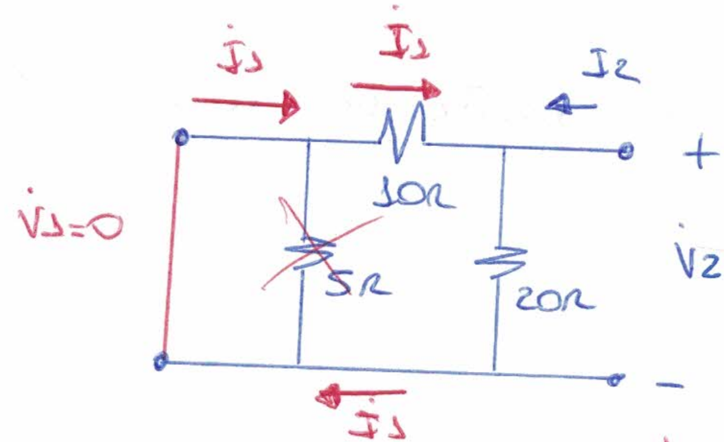
$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

$$y_{11} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{V}_2 = 0}$$

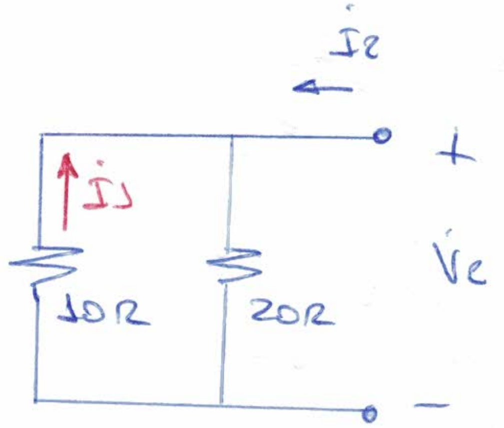


$$y_{11} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \quad \therefore \quad \boxed{y_{11} = 0{,}3\ \mho}$$

$$y_{12} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{V}_1 = 0}$$

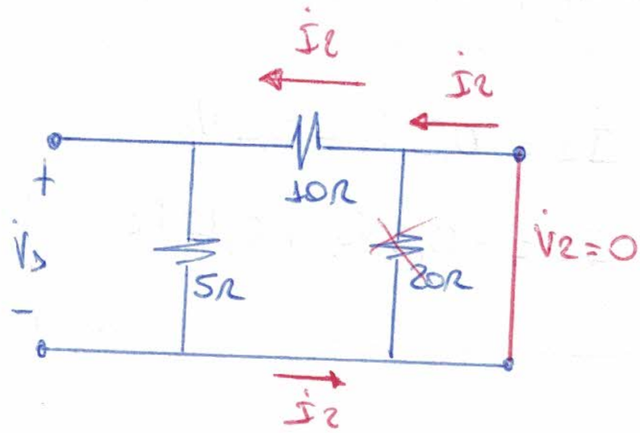


* integridade do quadripolo!



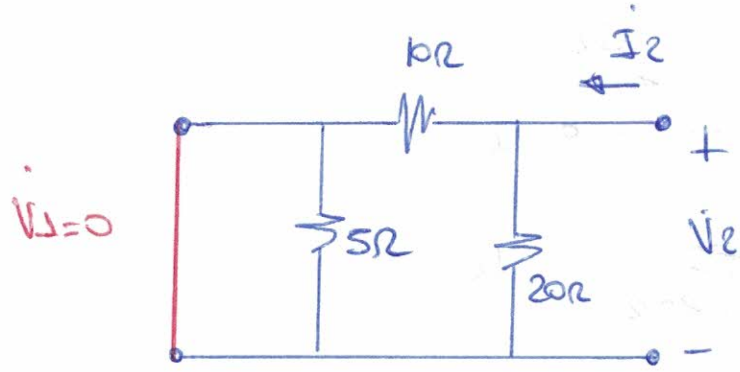
$$y_{12} = \frac{\dot I_1}{\dot V_2} = -\frac{1}{10} \quad \therefore \quad \boxed{y_{12} = -0{,}1\ \mho}$$

$$y_{21} = \frac{\dot I_2}{\dot V_1}\Big|_{\dot V_2 = 0}$$



$$y_{21} = \frac{\dot I_2}{\dot V_1} = -\frac{1}{10} \quad \therefore \quad \boxed{y_{21} = -0{,}1\ \mho}$$

$$y_{22} = \frac{\dot I_2}{\dot V_2}\Big|_{\dot V_1 = 0}$$



$$y_{22} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} \quad \therefore \quad \boxed{y_{22} = 0{,}15\ \mho}$$

Logo, as equações que descrevem este quadripolo são:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{I}_1 &= 0{,}3\dot{V}_1 - 0{,}1\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 &= -0{,}1\dot{V}_1 + 0{,}15\dot{V}_2 \end{aligned}}$$

Obs: $y_{12} = y_{21} \rightarrow$ rede recíproca formada somente por resistores (+ indutores + capacitores)
↳ neste exemplo

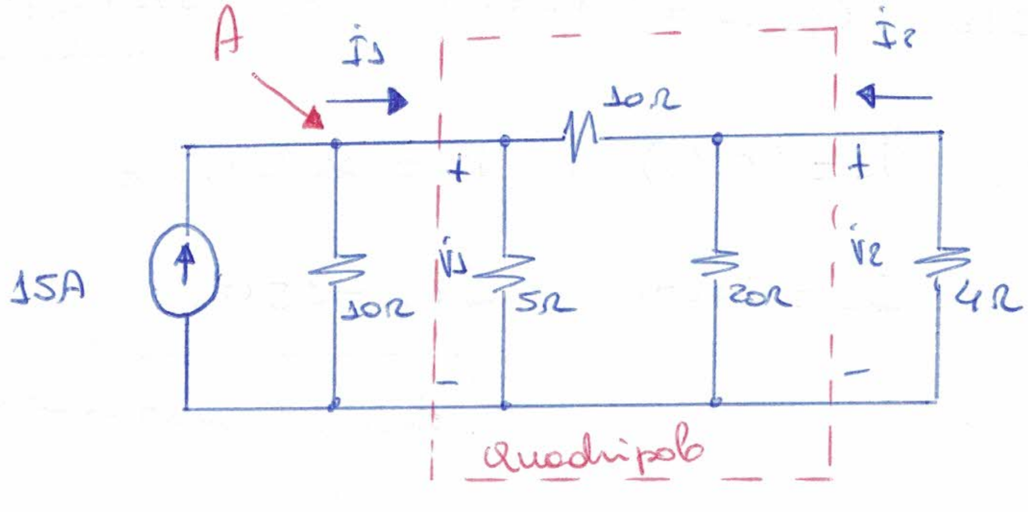
$y_{12} \neq y_{21} \rightarrow$ rede não recíproca: pode ser formada por Rs + Ls + Cs e fonte dependente!

Exercício: Para o quadripolo do exemplo anterior, aplique a ANÁLISE NODAL, e escreva as expressões para $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$ em termos das duas tensões nodais $\dot{V}_1$ e $\dot{V}_2$.

Resp: $\dot{I}_1 = \dfrac{\dot{V}_1}{5} + \dfrac{(\dot{V}_1 - \dot{V}_2)}{10}$ $\qquad \dot{I}_2 = \dfrac{\dot{V}_2}{20} + \dfrac{(\dot{V}_2 - \dot{V}_1)}{10}$

As vantagens da análise por quadripolos não parecem de forma muito clara em um exemplo simples como este, mas deve estar claro que uma vez determinados os parâmetros y para um quadripolo mais complicado, o desempenho deste quadripolo perante diferentes condições terminais pode ser facilmente determinado; é necessário apenas relacionar $\dot{V}_1$ e $\dot{I}_1$ na entrada e $\dot{V}_2$ e $\dot{I}_2$ na saída.

Exemplo: Considerando as equações que descrevem o quadripolo apresentado em função dos seus parâmetros y, determine os valores das correntes $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$



$$\dot{I}_1 = 0{,}3\dot{V}_1 - 0{,}1\dot{V}_2$$
$$\dot{I}_2 = -0{,}1\dot{V}_1 + 0{,}15\dot{V}_2$$

Equações em função dos parâmetros y

* LKC ao nó A:

$$-15 + \frac{\dot{V}_1}{10} + \dot{I}_1 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\dot{I}_1 = 15 - 0{,}1\dot{V}_1}$$

* Lei de Ohm na saída:

$$\dot{V}_2 = -4\dot{I}_2 \quad \therefore \quad \boxed{\dot{I}_2 = -0{,}25\dot{V}_2}$$

* Substituindo nas equações que descrevem o quadripolo:

$$\underbrace{15 - 0{,}1\dot{V}_1}_{\dot{I}_1} = 0{,}3\dot{V}_1 - 0{,}1\dot{V}_2 \quad \therefore \quad \boxed{15 = 0{,}4\dot{V}_1 - 0{,}1\dot{V}_2}$$

$$\overbrace{-0{,}25\dot{V}_2}^{\dot{I}_2} = -0{,}1\dot{V}_1 + 0{,}15\dot{V}_2 \quad \therefore \quad \boxed{0 = -0{,}1\dot{V}_1 + 0{,}4\dot{V}_2}$$

Logo: $\dot{V}_1 = 40\ (V)$ e $\dot{V}_2 = 10\ (V)$; e

$\dot{I}_1 = 11\ (A)$ e $\boxed{\dot{I}_2 = -2{,}5\ (A)}$.

∴ alimentando a carga!

* ## Parâmetros de impedância

Entradas/excitações: $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$
Saídas/respostas: $\dot{V}_1$ e $\dot{V}_2$

$$\dot{V}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2$$

$$\dot{V}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2$$

z's → parâmetros de impedância
impedâncias em circuito aberto
parâmetros em circuito aberto
parâmetros z

$$z_{11} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} \qquad z_{21} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0}$$

$$z_{12} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0} \qquad z_{22} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$

* ## Parâmetros híbridos (circuitos eletrônicos)

Entradas: $\dot{I}_1$ e $\dot{V}_2$

Saídas: $\dot{V}_1$ e $\dot{I}_2$

$$\dot{V}_1 = h_{11}\dot{I}_1 + h_{12}\dot{V}_2$$

$$\dot{I}_2 = h_{21}\dot{I}_1 + h_{22}\dot{V}_2$$

$$h_{11} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{V}_2=0} = x\ (\Omega)$$

$$h_{12} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{I}_1=0} = x\ \text{(ganho de tensão)}$$

$$h_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{V}_2=0} = x\ \text{(ganho de corrente)}$$

$$h_{22} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{I}_1=0} = x\ (\mho)$$

Entradas: $\dot{V}_1$ e $\dot{I}_2$

Saídas: $\dot{I}_1$ e $\dot{V}_2$

$$\dot{I}_1 = g_{11}\dot{V}_1 + g_{12}\dot{I}_2$$

$$\dot{V}_2 = g_{21}\dot{V}_1 + g_{22}\dot{I}_2$$

$$g_{11} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} = x\ (\mho)$$

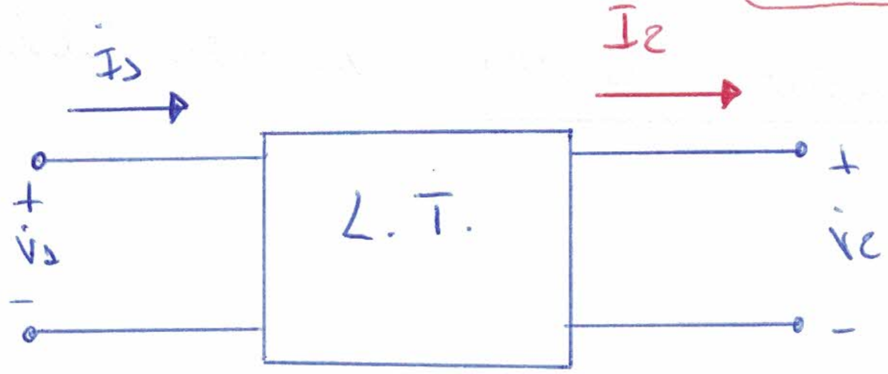
$$g_{12} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{V}_1=0} = x\ \text{(ganho de corrente)}$$

$$g_{21} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} = x\ \text{(ganho de tensão)}$$

$$g_{22} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{V}_1=0} = x\ (\Omega)$$

* Parâmetros de transmissão:

$\boxed{G \rightarrow LT \rightarrow D\ (\text{carga})}$



Entradas: $\dot{V}_1$ e $\dot{I}_1$

Saídas: $\dot{V}_2$ e $\dot{I}_2$

$$\dot{V}_2 = a\,\dot{V}_1 - b\,\dot{I}_1$$

$$\dot{I}_2 = c\,\dot{V}_1 - d\,\dot{I}_1$$

Entradas: $\dot{V}_2$ e $\dot{I}_2$

Saídas: $\dot{V}_1$ e $\dot{I}_1$

$$\dot{V}_1 = A\,\dot{V}_2 - B\,\dot{I}_2$$

$$\dot{I}_1 = C\,\dot{V}_2 - D\,\dot{I}_2$$

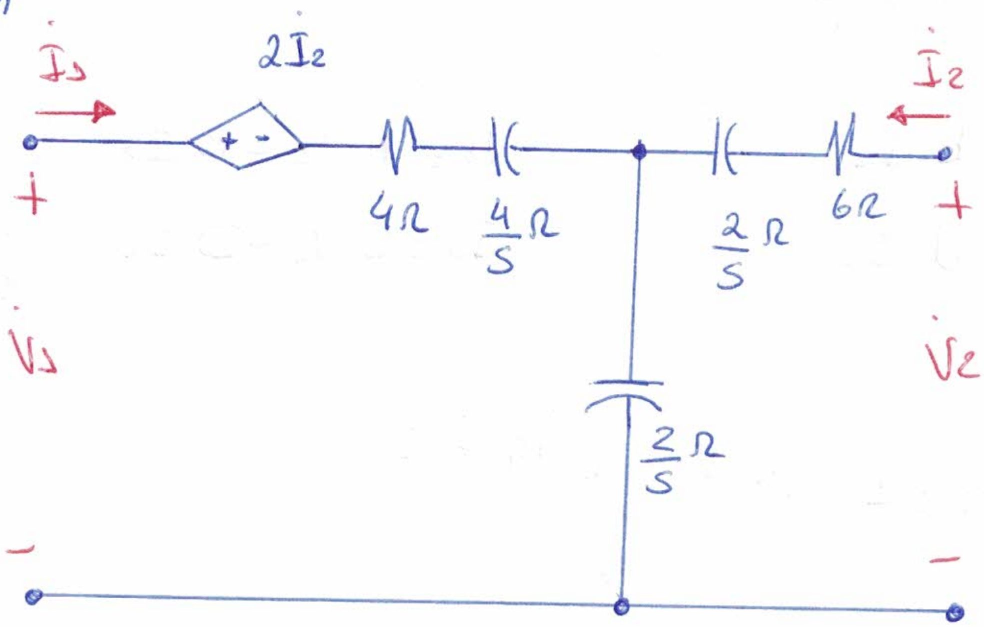
Exercícios: 14.8.1, 14.8.3 e 14.8.5

Obs: Fórmulas de conversão entre os parâmetros do quadripolo $\rightarrow$ Tabela 14.1 (Johnson pp. 368)

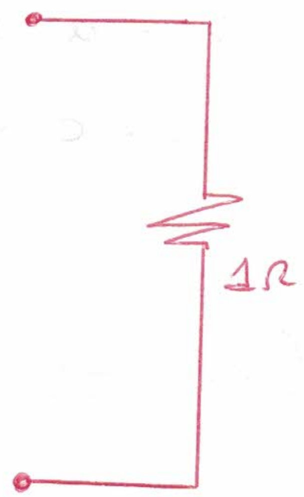
Exemplo: a) Calcule os parâmetros Z para o circuito apresentado.

b) Calcule a função de transferência (ou ganho de corrente) se um resistor de 1Ω for conectado ao secundário.

a)



b)

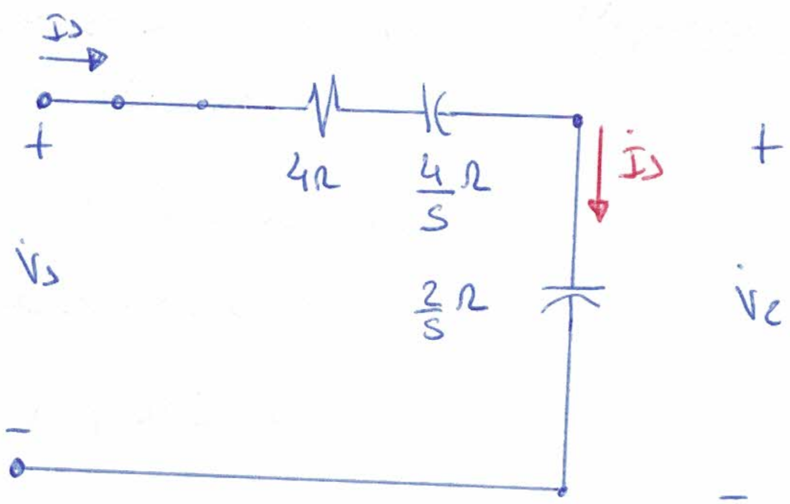


Parâmetros Z

$$\dot{V}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2$$

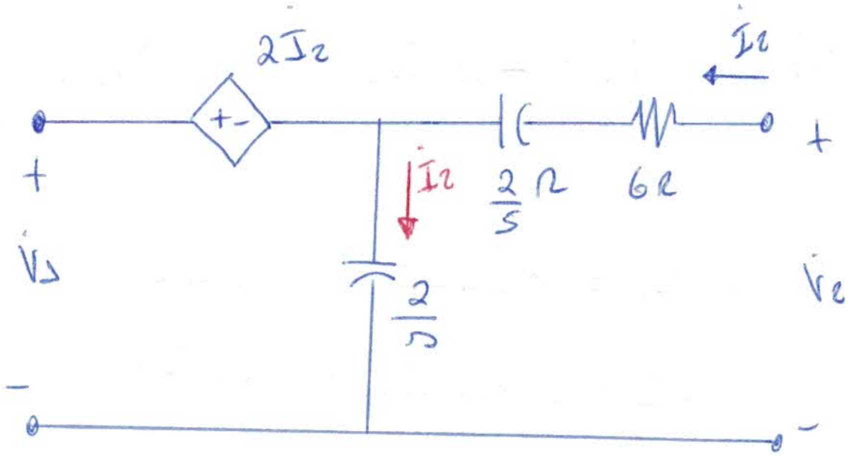
$$\dot{V}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2$$

$$z_{11} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0}$$



$$\boxed{z_{11} = 4 + \frac{6}{s}}$$

$$Z_{12} = \frac{\dot V_1}{\dot I_2}\Bigg|_{\dot I_1 = 0}$$



$$-\dot V_1 + 2\dot I_2 + \frac{2}{s}\dot I_2 = 0$$

$$\boxed{Z_{12} = \frac{\dot V_1}{\dot I_2} = 2 + \frac{2}{s}}$$

$$Z_{21} = \frac{\dot V_2}{\dot I_1}\Bigg|_{\dot I_2 = 0} \qquad \dot V_2 = \frac{2}{s}\dot I_1 \quad \therefore \quad \boxed{Z_{21} = \frac{2}{s}}$$

$$Z_{22} = \frac{\dot V_2}{\dot I_2}\Bigg|_{\dot I_1 = 0} \qquad Z_{22} = 6 + \frac{2}{s} + \frac{2}{s}$$

$$\boxed{Z_{22} = 6 + \frac{4}{s}}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 4 + \frac{6}{s} & 2 + \frac{2}{s} \\ \frac{2}{s} & 6 + \frac{4}{s} \end{bmatrix}$$

b) $\dot{V}_2 = -1 \cdot \dot{I}_2 \quad \therefore \quad \boxed{\dot{V}_2 = -\dot{I}_2}$

$$\dot{V}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2$$

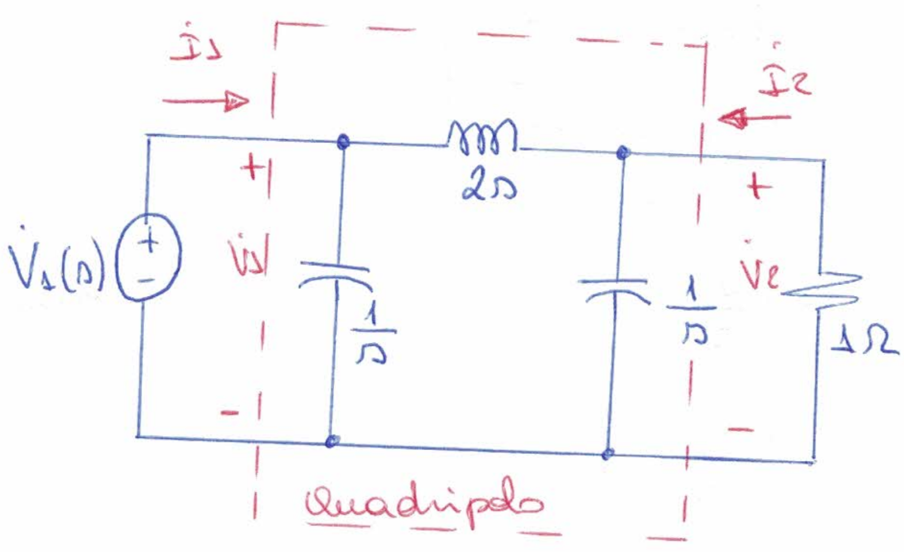
$$-\dot{I}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2$$

$$(1 + z_{22})\dot{I}_2 = -z_{21}\dot{I}_1$$

$$\boxed{\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{-z_{21}}{1 + z_{22}}}$$

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{-2/s}{1 + (6 + 4/s)} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{-2}{7s + 4}}$$

Exemplo: Calcule o ganho de tensão do circuito apresentado.



Lembrando que: $\dot{I}_1 = y_{11}\dot{V}_1 + y_{12}\dot{V}_2$

$\dot{I}_2 = y_{21}\dot{V}_1 + y_{22}\dot{V}_2$

e que, neste caso/circuito, $\dot{V}_2 = -\dot{I}_2$, tem-se:

$$-\dot{V}_2 = y_{21}\dot{V}_1 + y_{22}\dot{V}_2$$

$$(1+y_{22})\dot{V}_2 = -y_{21}\dot{V}_1$$

$$\boxed{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{-y_{21}}{1+y_{22}}}$$

lembrar da dualidade com o exemplo anterior!

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{-z_{21}}{1+z_{22}}$$

Os dois exemplos foram resolvidos genericamente a partir das duas equações do quadripolo!

$$y_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{V}_2=0}$$

$$\dot{V}_1(s) = -2s\,\dot{I}_2(s)$$

$$\boxed{y_{21} = -\frac{1}{2s}}$$

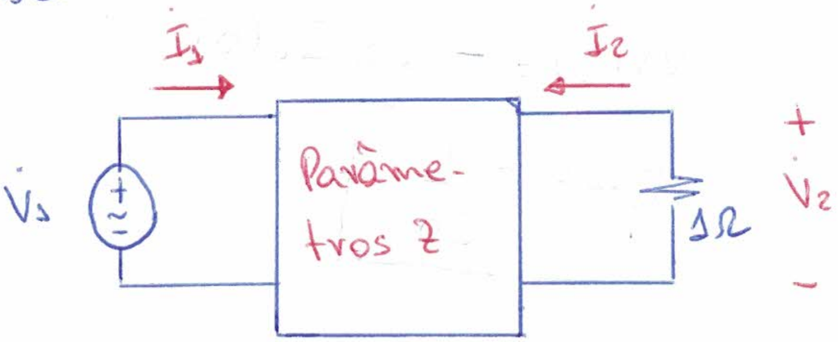
$$y_{22} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{V}_1=0}$$

$$\frac{\dot I_2}{\dot V_2} = \underbrace{s + \frac{1}{2s}}_{\text{admitâncias}} = y_{22}$$

$$\frac{\dot V_2}{\dot V_1} = \frac{-y_{21}}{1+y_{22}} = \frac{1/2s}{1+\left(s+\frac{1}{2s}\right)}$$

$$\boxed{\frac{\dot V_2}{\dot V_1} = \frac{1}{2s^2+2s+1}}$$

<u>Exemplo:</u> Calcule a função de transferência de ganho de tensão para o quadripolo terminado em $1\,\Omega$, com parâmetros $z_{11} = 6\,\Omega$, $z_{12} = 4\,\Omega$, $z_{21} = 4\,\Omega$ e $z_{22} = 10\,\Omega$.



$$\left.\begin{aligned} \dot V_1 &= z_{11}\dot I_1 + z_{12}\dot I_2 \\ \dot V_2 &= z_{21}\dot I_1 + z_{22}\dot I_2 \end{aligned}\right\} \text{parâmetros } z$$

$$H(s) = \frac{\dot V_2(s)}{\dot V_1(s)} = ?$$

$$\dot V_2 = -1 \cdot \dot I_2 \qquad \boxed{\dot V_2 = -\dot I_2}$$

$$\dot V_1 = z_{11}\dot I_1 - z_{12}\dot V_2 \quad \therefore \quad \dot I_1 = \frac{\dot V_1 + z_{12}\dot V_2}{z_{11}}$$

$$\dot V_2 = z_{21}\dot I_1 - z_{22}\dot V_2$$

$$\therefore \quad \dot I_1 = \frac{\dot V_2 + z_{22}\dot V_2}{z_{21}}$$

$$\frac{\dot V_1 + z_{12}\dot V_2}{z_{11}} = \frac{\dot V_2 + z_{22}\dot V_2}{z_{21}}$$

$$z_{21}(\dot V_1 + z_{12}\dot V_2) = z_{11}(\dot V_2 + z_{22}\dot V_2)$$

$$H(s) = \frac{\dot V_2}{\dot V_1} = \frac{z_{21}}{z_{11} + z_{11}.z_{22} - z_{21}.z_{12}} = \frac{4}{6+6.10-4.4}$$

$$\boxed{H(S) = \frac{2}{25}}$$

Exercício: 14.29 (Johnson)

Mostre que os parâmetros de transmissão A, B, C e D, definidos para o quadripolo abaixo como:

$\dot{V}_1 = A\dot{V}_2 - B\dot{I}_2$ (1)

$\dot{I}_1 = C\dot{V}_2 - D\dot{I}_2$ (2)

são dados por:

$A = \dfrac{z_{11}}{z_{21}}$ $B = \dfrac{\Delta z}{z_{21}}$ $C = \dfrac{1}{z_{21}}$ e $D = \dfrac{z_{22}}{z_{21}}$

Solução: $\dot{V}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2$ (3)

$\dot{V}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2$ (4)

De (4) temos:

$\dot{V}_2 - z_{22}\dot{I}_2 = z_{21}\dot{I}_1$

$\dot{I}_1 = \dfrac{\dot{V}_2}{z_{21}} - \dfrac{z_{22}}{z_{21}}\dot{I}_2$ (5) $\rightarrow$ $\boxed{C = \dfrac{1}{z_{21}}}$ e $\boxed{D = \dfrac{z_{22}}{z_{21}}}$

(5) $\rightarrow$ (3)

$\dot{V}_1 = z_{11}\left(\dfrac{\dot{V}_2}{z_{21}} - \dfrac{z_{22}}{z_{21}}\dot{I}_2\right) + z_{12}\dot{I}_2$

$$\dot{V}_1 = \frac{z_{11}}{z_{21}} \dot{V}_2 - \frac{(z_{11}.z_{22} - z_{21}.z_{12})}{z_{21}} \dot{I}_2$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} = z_{11}.z_{22} - z_{12}.z_{21}$$

$$\boxed{A = \frac{z_{11}}{z_{21}}} \quad e \quad \boxed{B = \frac{\Delta z}{z_{21}}}$$

Exercício: 14.27 (Johnson)

Mostre que os parâmetros híbridos definidos abaixo podem ser obtidos a partir dos parâmetros z por:

$$g_{11} = \frac{1}{z_{11}} \qquad g_{12} = \frac{-z_{12}}{z_{11}}$$

$$g_{21} = \frac{z_{21}}{z_{11}} \qquad g_{22} = \frac{\Delta z}{z_{11}}$$

Onde: $\Delta z = z_{11}.z_{22} - z_{12}.z_{21}$ $\quad \boxed{\Delta z = z_{12}.z_{21} - z_{11}.z_{22}}$

Parâmetros híbridos: $\dot{I}_1 = g_{11} \dot{V}_1 + g_{12} \dot{I}_2$ (1)

$\dot{V}_2 = g_{21} \dot{V}_1 + g_{22} \dot{I}_2$ (2)

Solução:

$$\dot{V}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2 \quad (3)$$

$$\dot{V}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2 \quad (4)$$

De (3):

$$\dot{V}_1 - z_{12}\dot{I}_2 = z_{11}.\dot{I}_1$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_1}{z_{11}} - \frac{z_{12}}{z_{11}}\dot{I}_2 \quad (5)$$

$$\boxed{g_{11} = \frac{1}{z_{11}}} \quad \text{e} \quad \boxed{g_{12} = -\frac{z_{12}}{z_{11}}}$$

(5) → (4):

$$\dot{V}_2 = z_{21}\left(\frac{\dot{V}_1}{z_{11}} - \frac{z_{12}}{z_{11}}\dot{I}_2\right) + z_{22}\dot{I}_2$$

$$\dot{V}_2 = \frac{z_{21}}{z_{11}}\dot{V}_1 - \left(\frac{z_{12}.z_{21} - z_{22}.z_{11}}{z_{11}}\right)\dot{I}_2$$

$$\boxed{g_{21} = \frac{z_{21}}{z_{11}}} \quad \text{e} \quad \boxed{g_{22} = \frac{\Delta z}{z_{11}}}$$

Tabela 14.1 (pp. 368)
Fórmulas de conversão dos parâmetros dos quadripolos!

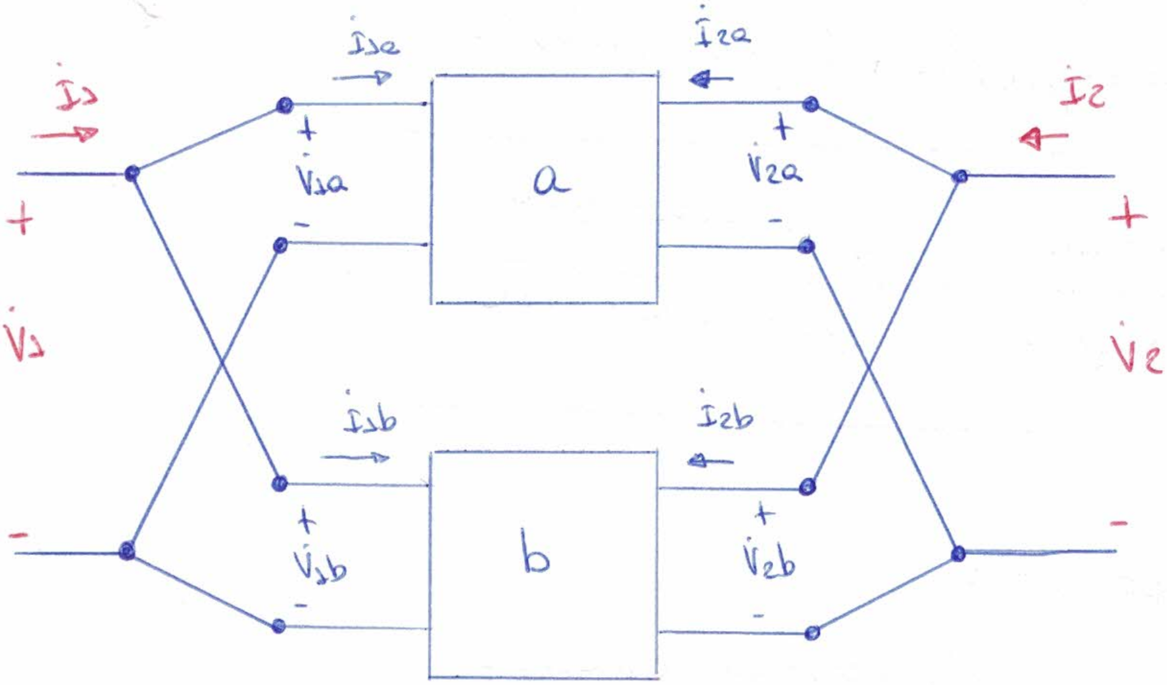
Exemplos: 14.14, 14.15, 14.16 e 14.17
14.23 / 14.24 e 14.25

Exercícios: 14.25/26/27/28/29/33 e 35
14.8.1/8.2/83 e 8.5
14.9.1

Associações de Quadripolos

1) Associação paralela

→ admitâncias são somadas!



$$\dot I_{1a} = y_{11a}\,\dot V_{1a} + y_{12a}\,\dot V_{2a}$$
$$\dot I_{2a} = y_{21a}\,\dot V_{1a} + y_{22a}\,\dot V_{2a}$$

$$\dot I_{1b} = y_{11b}\,\dot V_{1b} + y_{12b}\,\dot V_{2b}$$
$$\dot I_{2b} = y_{21b}\,\dot V_{1b} + y_{22b}\,\dot V_{2b}$$

Sendo: $\dot{V}_1 = \dot{V}_{1a} = \dot{V}_{1b}$

$\dot{V}_2 = \dot{V}_{2a} = \dot{V}_{2b}$

$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} + \dot{I}_{1b}$

$\dot{I}_2 = \dot{I}_{2a} + \dot{I}_{2b}$

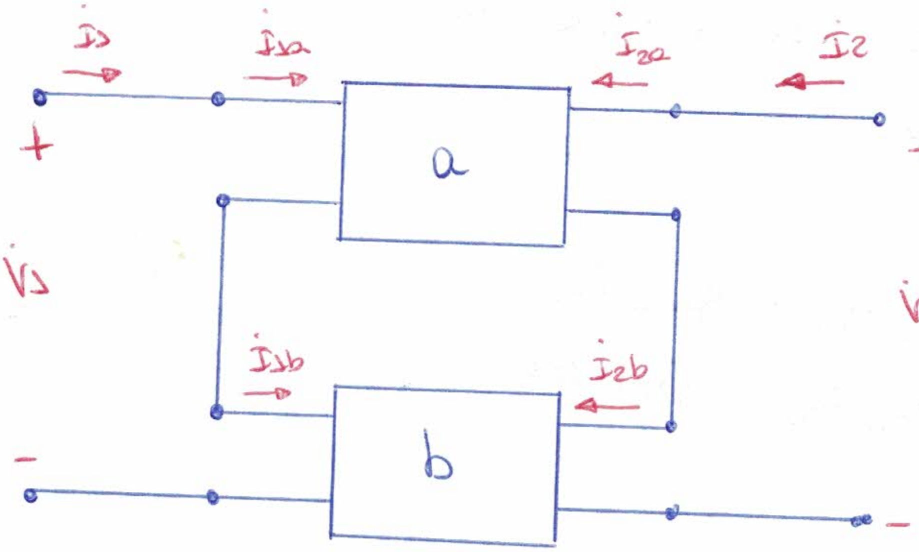
$$\dot{I}_1 = (y_{11a} + y_{11b})\dot{V}_1 + (y_{12a} + y_{12b})\dot{V}_2$$

$$\dot{I}_2 = (y_{21a} + y_{21b})\dot{V}_1 + (y_{22a} + y_{22b})\dot{V}_2$$

$y_{11} = y_{11a} + y_{11b}$	$y_{12} = y_{12a} + y_{12b}$
$y_{21} = y_{21a} + y_{21b}$	$y_{22} = y_{22a} + y_{22b}$

2) Associação série

→ impedâncias são somadas



$$\dot{V}_{1a} = z_{11a}\dot{I}_{1a} + z_{12a}\dot{I}_{2a}$$

$$\dot{V}_{2a} = z_{21a}\dot{I}_{1a} + z_{22a}\dot{I}_{2a}$$

$$\dot{V}_{1b} = z_{11b}\dot{I}_{1b} + z_{21b}\dot{I}_{2b}$$

$$\dot{V}_{2b} = z_{21}\dot{I}_{1b} + z_{22}\dot{I}_{2b}$$

Sendo: $\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} = \dot{I}_{1b}$

$\dot{I}_2 = \dot{I}_{2a} = \dot{I}_{2b}$

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_{1a} + \dot{V}_{1b} = (z_{11a} + z_{11b})\dot{I}_1 + (z_{12a} + z_{12b})\dot{I}_2$$

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_{2a} + \dot{V}_{2b} = (z_{21a} + z_{21b})\dot{I}_1 + (z_{22a} + z_{22b})\dot{I}_2$$

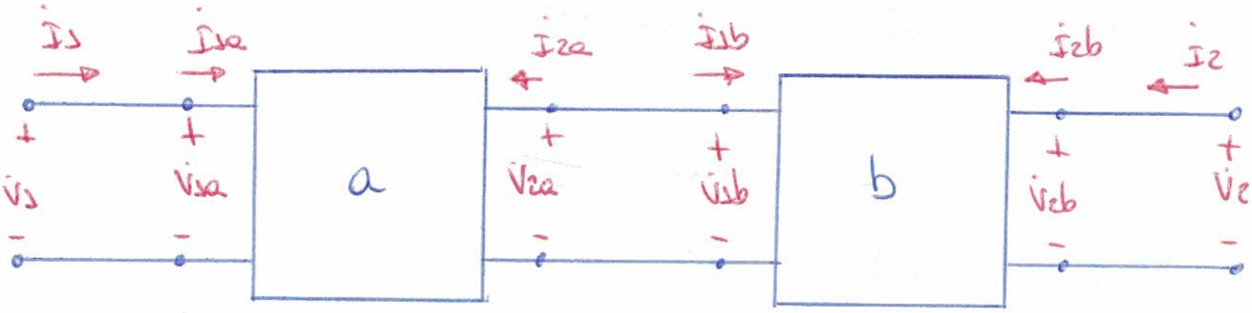
$z_{11} = z_{11a} + z_{11b}$	$z_{12} = z_{12a} + z_{12b}$
$z_{21} = z_{21a} + z_{21b}$	$z_{22} = z_{22a} + z_{22b}$

3) Associação em cascata

Matriz de transmissão da rede completa

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix}$$

* produto das matrizes de transmissão das redes a e b



$$\dot{V}_{1a} = A_a \dot{V}_{2a} - B_a \dot{I}_{2a} \qquad \dot{V}_{1b} = A_b \dot{V}_{2b} - B_b \dot{I}_{2b}$$

$$\dot{I}_{1a} = C_a \dot{V}_{2a} - D_a \dot{I}_{2a} \qquad \dot{I}_{1b} = C_b \dot{V}_{2b} - D_b \dot{I}_{2b}$$

Sendo: $\dot{V}_1 = \dot{V}_{1a}$ e $\dot{V}_{2a} = \dot{V}_{1b}$ e $\dot{V}_{2b} = \dot{V}_2$

$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a}$ e $\dot{I}_{2a} = -\dot{I}_{1b}$ e $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2b}$

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_{1a} = A_a \dot{V}_{2a} - B_a \dot{I}_{2a}$$

$$\dot{V}_1 = A_a \dot{V}_{1b} + B_a \dot{I}_{1b}$$

$$\dot{V}_1 = A_a (A_b \dot{V}_{2b} - B_b \dot{I}_{2b}) + B_a (C_b \dot{V}_{2b} - D_b \dot{I}_{2b})$$

$$\dot{V}_1 = (A_a A_b + B_a C_b) \dot{V}_{2b} - (A_a B_b + B_a D_b) \dot{I}_{2b}$$

ou

$$\boxed{\dot{V}_1 = (A_a A_b + B_a C_b) \dot{V}_2 - (A_a B_b + B_a D_b) \dot{I}_2}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} = C_a \dot{V}_{2a} - D_a \dot{I}_{2a}$$

$$\dot{I}_1 = C_a \dot{V}_{1b} + D_a \dot{I}_{1b}$$

$$\dot{I}_1 = C_a \left(A_b \dot{V}_{2b} - B_b \dot{I}_{2b} \right) + D_a \left(C_b \dot{V}_{2b} - D_b \dot{I}_{2b} \right)$$

$$\dot{I}_1 = (C_a A_b + D_a C_b) \dot{V}_{2b} - (C_a B_b + D_a D_b) \dot{I}_{2b}$$

$$\boxed{\dot{I}_1 = (C_a A_b + D_a C_b) \dot{V}_2 - (C_a B_b + D_a D_b) \dot{I}_2}$$

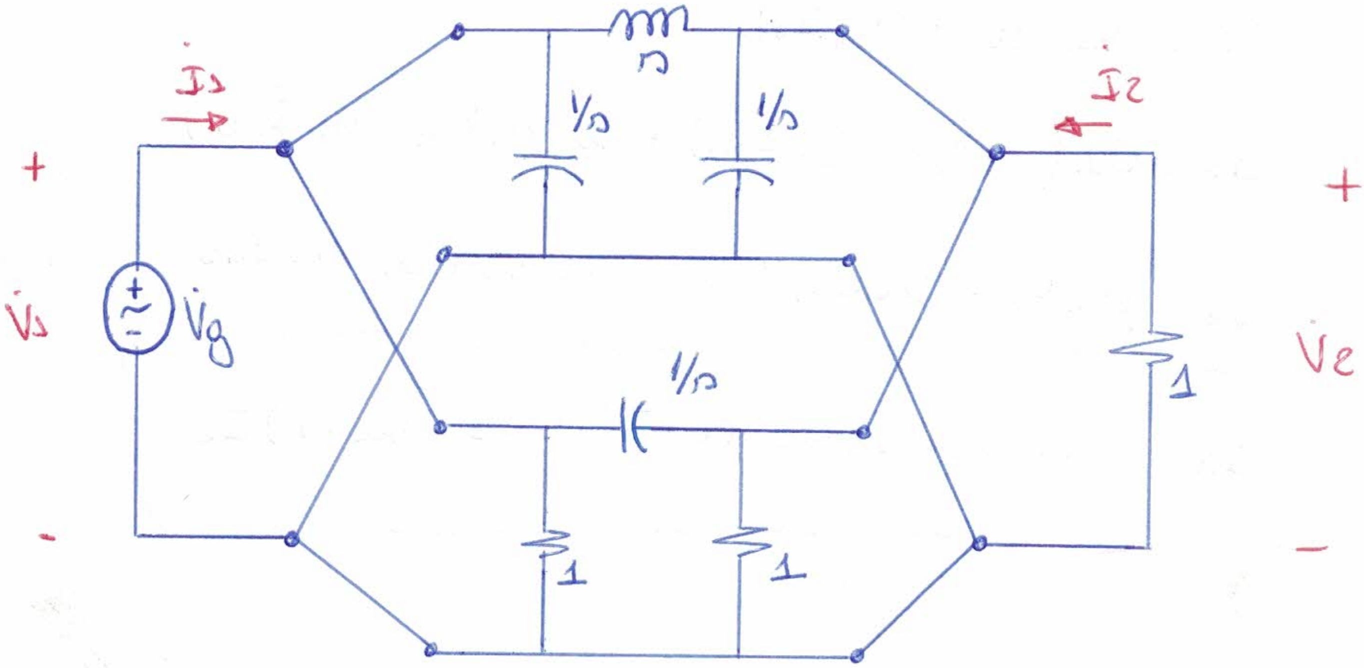
$A = A_a A_b + B_a C_b$ $\qquad$ $B = A_a B_b + B_a D_b$

$C = C_a A_b + D_a C_b$ $\qquad$ $D = C_a B_b + D_a D_b$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix}$$

<u>Exemplo</u> 14.23 (pp. 375)

Calcular a função de transferência $\dot{V}_2 / \dot{V}_g$ do circuito apresentado.



Solução: associação paralela (admitâncias são somadas)

$$\dot{V}_2 = -\dot{I}_2 \quad \text{e} \quad \dot{V}_1 = \dot{V}_g$$

$$\dot{I}_1 = y_{11}\dot{V}_1 + y_{12}\dot{V}_2$$

$$\dot{I}_2 = y_{21}\dot{V}_1 + y_{22}\dot{V}_2$$

$$-\dot{V}_2 = y_{21}\dot{V}_1 + y_{22}\dot{V}_2$$

$$(1 + y_{22})\dot{V}_2 = -y_{21}\dot{V}_1$$

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{-y_{21}}{1 + y_{22}}$$

$$y_{21} = y_{21a} + y_{21b}$$

$$y_{22} = y_{22a} + y_{22b}$$

$$y_{21a} = \left.\frac{\dot{I}_{2a}}{\dot{V}_{1a}}\right|_{\dot{V}_{2a}=0} \qquad \boxed{y_{21a} = -\frac{1}{s}}$$

$$y_{21b} = \left.\frac{\dot{I}_{2b}}{\dot{V}_{1b}}\right|_{\dot{V}_{2b}=0} \qquad \boxed{y_{21b} = -s}$$

$$y_{21} = -s - \frac{1}{s}$$

$$y_{22a} = \left.\frac{\dot{I}_{2a}}{\dot{V}_{2a}}\right|_{\dot{V}_{1a}=0} \qquad \boxed{y_{22a} = s + \frac{1}{s}}$$

$$y_{22b} = \left.\frac{\dot{I}_{2b}}{\dot{V}_{2b}}\right|_{\dot{V}_{1b}=0} \qquad \boxed{y_{22b} = 1 + s}$$

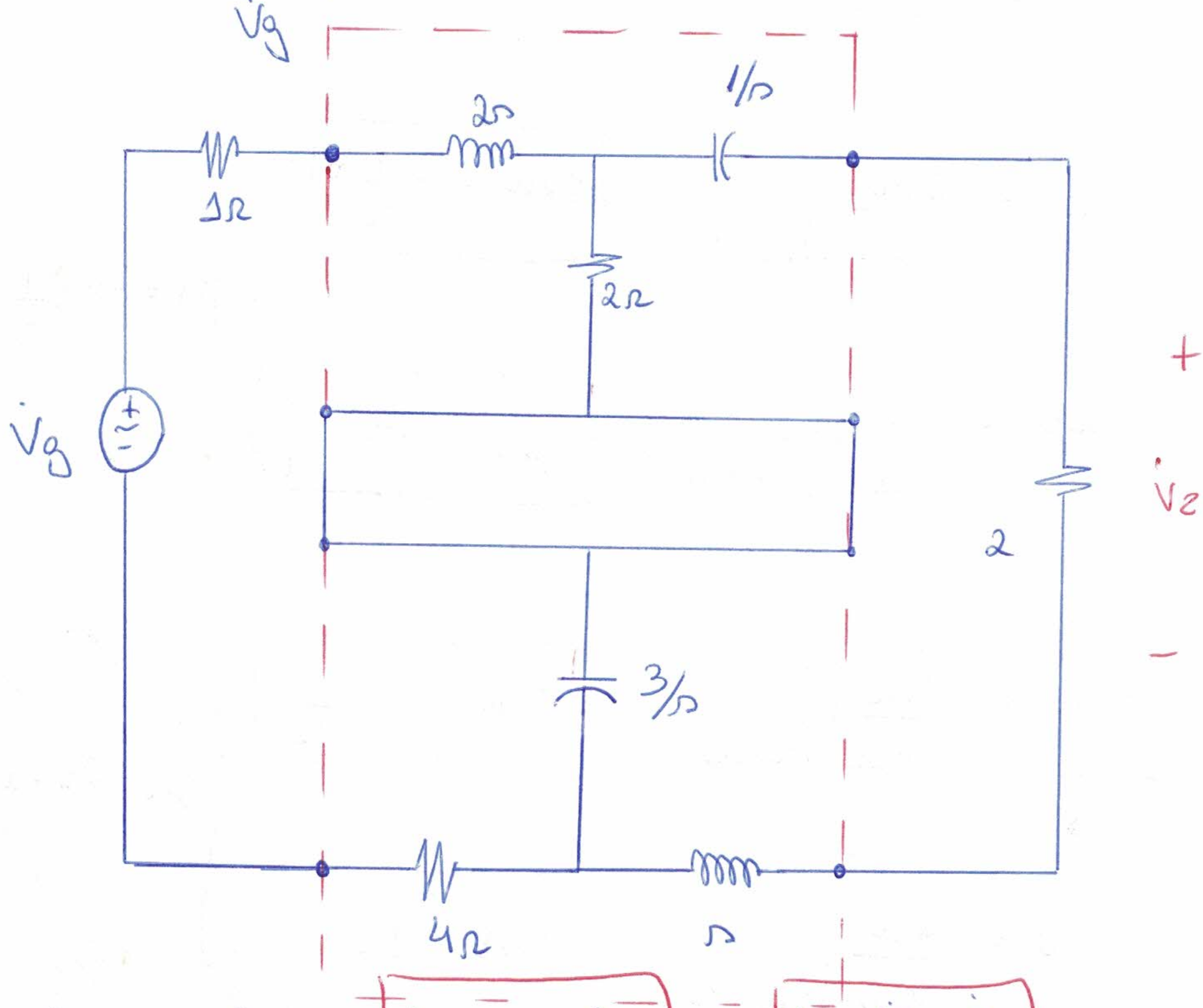
$$y_{22} = 2s + \frac{1}{s} + 1$$

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = -\frac{y_{21}}{1 + y_{22}} = \frac{s + \frac{1}{s}}{1 + \left(2s + \frac{1}{s} + 1\right)}$$

$$\boxed{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{s^2 + 1}{2s^2 + 2s + 1}}$$

Exercício 14.10.1 (pp. 378)

Calcule $\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_g}$ para o circuito apresentado.



$\dot{V}_2 = -2\dot{I}_2 \quad \therefore \quad \boxed{\dot{I}_2 = -0{,}5\,\dot{V}_2} \quad \therefore \quad \boxed{\dot{V}_1 = \dot{V}_g - \dot{I}_1}$

$\dot{V}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2 \quad (1).$

$\dot{V}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2 \quad (2).$

Ver figura (*)

$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_g} = ?$

$$Z_{11} = Z_{11a} + Z_{11b}$$

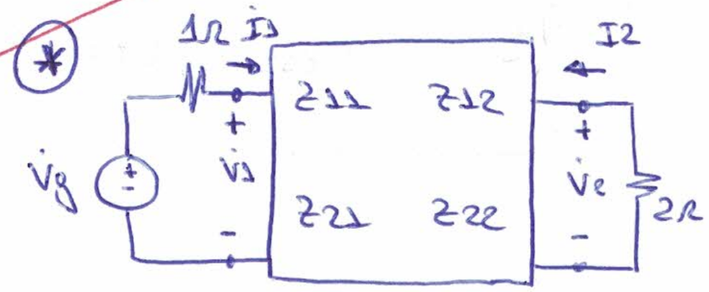
$$Z_{12} = Z_{12a} + Z_{12b}$$

$$Z_{21} = Z_{21a} + Z_{21b}$$

$$Z_{22} = Z_{22a} + Z_{22b}$$

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_g} = \frac{2\, \underset{}{Z_{21}}^{\,Z_L}}{(Z_{11} + \underset{Z_g}{1})(Z_{22} + \underset{Z_L}{2}) - Z_{12} \cdot Z_{21}}$$

NÃO



$$\left.\begin{aligned} \dot{V}_g - \dot{I}_1 &= Z_{11} \cdot \dot{I}_1 - 0{,}5\, Z_{12} \cdot \dot{V}_2 \\ \dot{V}_g + 0{,}5\, Z_{12} \dot{V}_2 &= (Z_{11} + 1)\, \dot{I}_1 \end{aligned}\right\} \text{Eq. (1)}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_g + 0{,}5\, Z_{12} \dot{V}_2}{Z_{11} + 1}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{V}_2 &= Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22}(-0{,}5\, \dot{V}_2) \\ \dot{I}_1 &= \frac{\dot{V}_2 + 0{,}5\, Z_{22} \dot{V}_2}{Z_{21}} \end{aligned}\right\} \text{Eq. (2)}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_g + 0{,}5 z_{12} \dot{V}_2}{(z_{11}+1)} = \frac{\dot{V}_2 + 0{,}5 z_{22} \dot{V}_2}{z_{21}}$$

$\vdots$

$$\boxed{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_g} = \frac{2 z_{21}}{2 z_{11} + z_{11} . z_{22} + 2 + z_{22} - z_{12} . z_{21}}}$$

$$\boxed{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_g} = \frac{2 z_{21}}{(z_{11}+1)(z_{22}+2) - z_{12} . z_{21}}}$$