Complementos de Física Moderna
Bloco 3 - Aula 01

Ivã Gurgel (gurgel@usp.br)
Marcelo G. Munhoz (munhoz@if.usp.br)

Precisamos falar sobre conteúdo!

- **Conteúdo** no Ensino Médio
  - Afinal, o que abordar de Física Moderna e Contemporânea no Ensino Médio?
- **Conteúdo** no Ensino Superior
  - Qual é o conhecimento básico de FMC necessário para professores alcançarem a autonomia (ou superarem os obstáculos) para abordar esse tema no EM?

Perguntas que devem direcionar a escolha do conteúdo?

Motivação Geral para o Bloco 3

- **Qual é o conhecimento básico de FMC necessário para os professores alcançarem a autonomia (ou superarem os obstáculos) para abordar esse tema no EM?**

Discussão da Aula

- Vamos começar a aula com uma discussão apresentada por vocês
- Um ou dois slides de cada grupo respondendo:
  - Quais tópicos de FMC estão presentes no material didático do EM?
  - Na opinião de vocês, qual é a razão para essa escolha?
- Procurem fazer um levantamento baseado na própria experiência

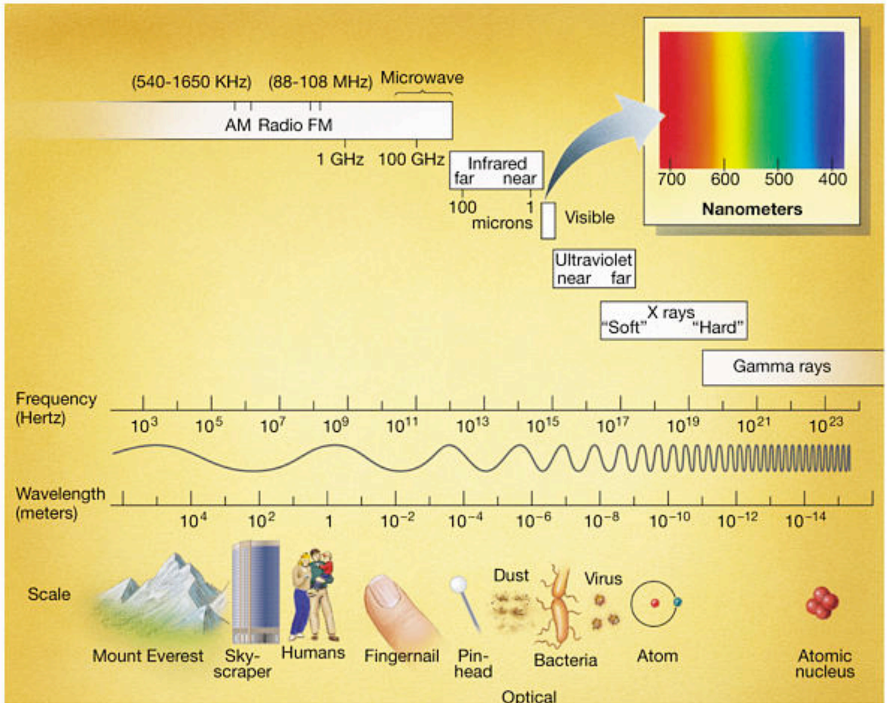
Como podemos pensar na estrutura mais elementar do Universo?

- Se pudéssemos dividir a matéria indefinidamente, você já se perguntou onde isso iria parar?
- Ou melhor, será que isso teria um fim?
- Se tiver, o que restará em nossas mãos? O que será isso?

O que “existe” no “nosso” mundo físico?

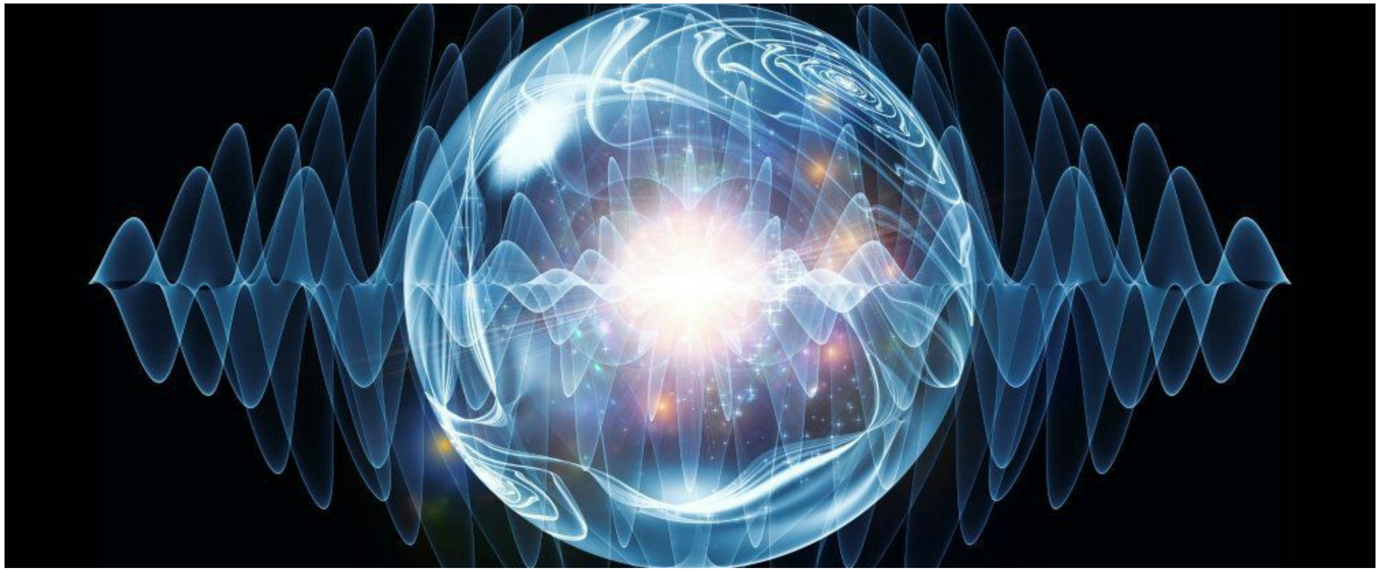
- Matéria

- Radiação eletromagnética



Como podemos pensar na estrutura mais elementar do Universo?

- Dualidade onda-partícula
  - Conclusão empírica nas primeiras três décadas do século XX (bloco 2)



Hipótese de de Broglie

- Em sua tese de doutorado de 1924, Maurice de Broglie propõe que, assim como a radiação eletromagnética tem um caráter dual onda-partícula, a matéria também deve apresentar um caráter ondulatório
- Ele propõe que as partículas de matéria também podem ter associadas a elas propriedades ondulatórias (frequência e comprimento de onda), onde:

$$E = h\nu \qquad\qquad p = h/\lambda \Rightarrow \lambda = h/p$$

Como podemos pensar na estrutura mais elementar do Universo?

- Como construímos uma teoria sobre a estrutura mais elementar do Universo a partir da constatação experimental da dualidade onda-partícula?
- Vamos começar com o que chamamos de matéria!
  - Como descrever o comportamento de algo localizado (como uma partícula) mas que tem esse caráter dual?
    - O pacote de onda $\rightarrow$ Princípio da Incerteza

Propriedades ondulatórias da matéria

- Se as partículas que constituem a matéria (como os elétrons) possuem propriedades ondulatórias, como podemos descrever um elétron então?
- O que seria essa "onda" que constitui o elétron? O elétron é uma onda se propagando em que meio?
- Como descrever essa "onda" do elétron matematicamente?

Propriedades ondulatórias da matéria

- Se as partículas que constituem a matéria (como os elétrons) possuem propriedades ondulatórias, como podemos descrever um elétron então?
- **O que seria essa "onda" que constitui o elétron? O elétron é uma onda se propagando em que meio?**
- Como descrever essa "onda" do elétron matematicamente?

Dualidade Onda-Partícula

- A mesma idéia da dualidade onda-partícula da radiação eletromagnética é válida para a matéria
- Bohr elaborou o Princípio da complementaridade:
    - “o caráter ondulatório e o corpuscular da natureza são complementares, isto é, ou se observa a manifestação do comportamento ondulatório de um sistema físico ou do comportamento corpuscular, nunca os dois simultaneamente”

Dualidade Onda-Partícula

- Max Born introduziu uma interpretação probabilística para a dualidade onda-partícula
- Como no caso da radiação eletromagnética, podemos descrever a propagação da matéria a partir de uma abordagem ondulatória
- Essa onda, chamada de *função de onda* e representada pela letra grega ψ, determina a **probabilidade** da partícula ser observada em uma certa posição em um certo instante de tempo

Interpretação probabilística

- A intensidade da radiação eletromagnética está associada à amplitude ao quadrado do campo eletromagnético e, ao mesmo tempo, ao número de fótons
- Einstein interpretou essa amplitude ao quadrado do campo eletromagnético como uma medida do número médio de fótons por unidade de volume
- Da mesma forma, a intensidade ao quadrado da função de onda $|\Psi|^2$ determina o número de partículas de um sistema físico, ou a **probabilidade** de encontrar uma partícula em uma certa posição em um dado instante de tempo

Interpretação probabilística

- Portanto, segundo essa interpretação, só podemos determinar um comportamento probabilístico para as partículas de matéria, a partir de sua função de onda
- Apesar dos observáveis (posição e momento, por exemplo) terem um caráter probabilístico (não-determinístico), a função de onda tem um comportamento que pode ser determinado de maneira exata

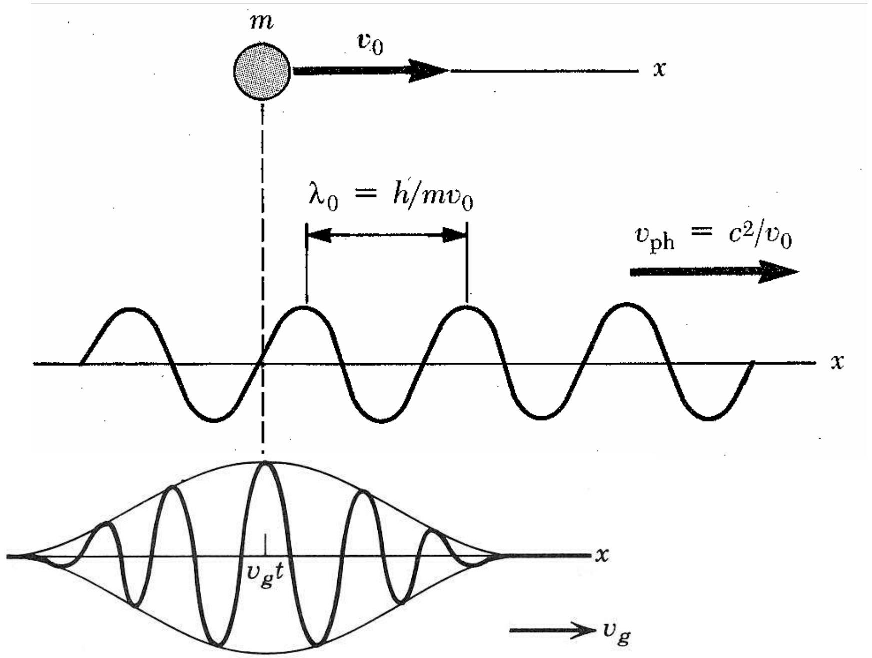
Propriedades ondulatórias da matéria

- Se as partículas que constituem a matéria (como os elétrons) possuem propriedades ondulatórias, como podemos descrever um elétron então?
- O que seria essa "onda" que constitui o elétron? O elétron é uma onda se propagando em que meio?
- **Como descrever essa "onda" do elétron matematicamente?**

Propriedades ondulatórias da matéria

$$p = h/\lambda \Rightarrow \lambda = h/p$$

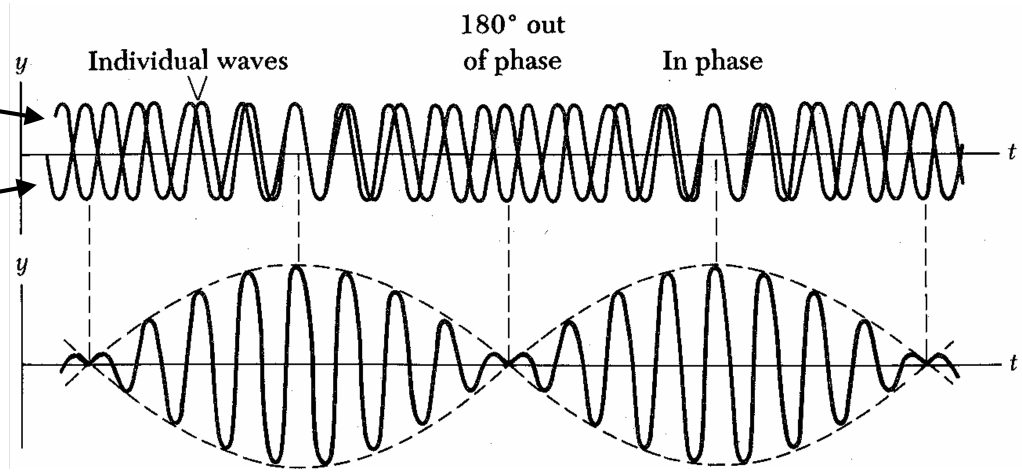
- Para representar uma partícula, devemos utilizar uma onda "localizada" no espaço, ou seja, um "pacote de ondas", cuja velocidade de grupo coincide com a velocidade da partícula



Propriedades ondulatórias da matéria

$$y_1(x,t) = A\cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$y_2(x,t) = A\cos(k_2 x - \omega_2 t)$$



$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = \left[2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right]\cos\left[\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]$$

- Um pacote de ondas é obtido a partir da combinação de várias ondas de frequências diferentes

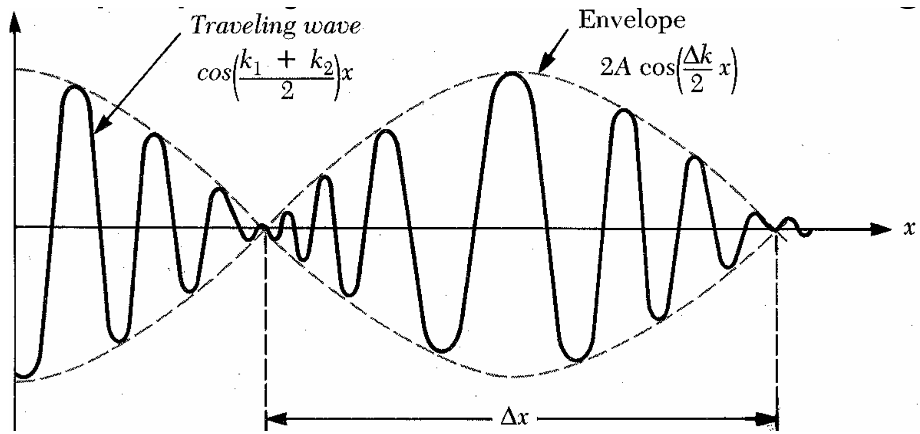
- Neste exemplo, duas ondas de frequências próximas se combinam resultando em vários pacotes ou grupos de onda

Propriedades ondulatórias da matéria

- Na realidade, a onda resultante corresponde a uma onda de frequência maior "envolta" por uma onda de frequência menor

- O pacote de onda apresenta uma relação entre sua largura e os comprimentos de onda que o compõe:

$$\Delta k \cdot \Delta x = 2\pi$$

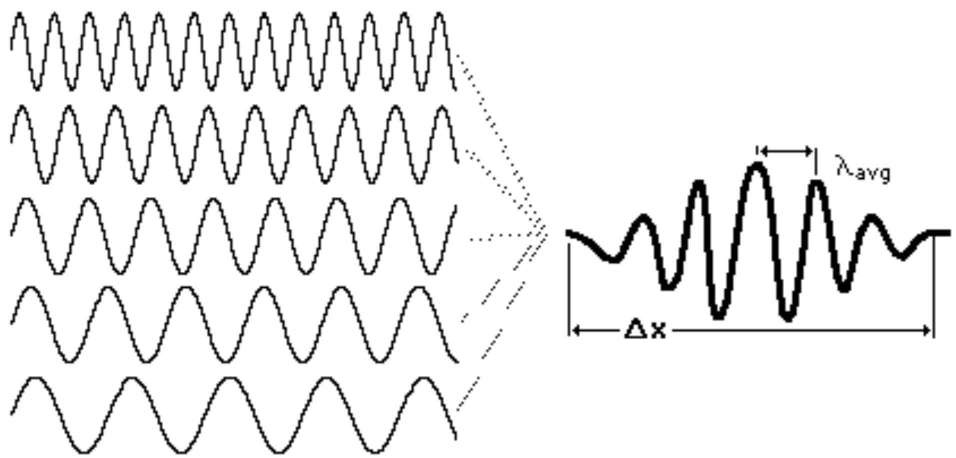


$$y(x) = \left[2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x\right)\right]\cos\left[\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x\right]$$

Propriedades ondulatórias da matéria

- Integral de Fourier: para se construir um pacote de onda é preciso combinar muitas frequências, ou seja:

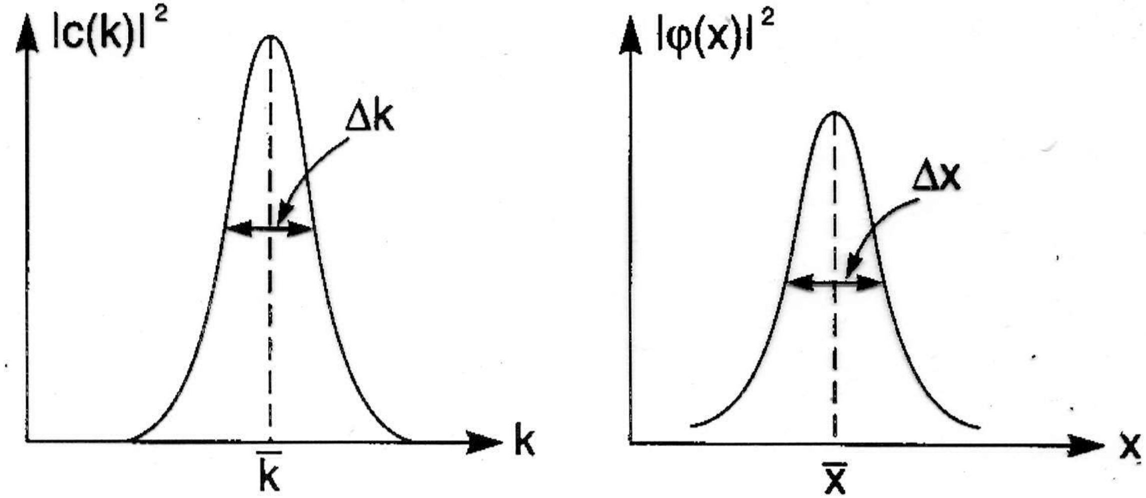
$$\Psi = \sum_{i=0}^{N} A_i cos\,(k_i x - \omega_i t)$$



- que no limite do contínuo resulta em:

$$\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) cos\,(kx - \omega t)\, dk$$

Propriedades ondulatórias da matéria



- Quanto mais estreito o pacote de onda, uma maior dispersão de comprimentos de onda é necessária e vice-versa, sendo que pode-se mostrar pelas integrais de Fourier que: $\Delta k \cdot \Delta x \geq 1/2$

Princípio da Incerteza

- Em 1927, Werner Heisenberg propõe o "Princípio da Incerteza" que diz que é impossível determinar simultaneamente a posição e o momento de uma partícula. Matematicamente:

  $$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2$$

- É importante enfatizar que a limitação imposta por esse princípio não diz respeito à instrumentação necessária para se fazer esta medida, mas é uma característica intrínseca da natureza

Princípio da Incerteza

- A relação de dispersão entre os comprimentos de onda que compõe o pacote de onda e sua largura leva ao princípio da incerteza

  $$\Delta k \cdot \Delta x \geq 1/2 \Rightarrow \Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2$$

  pois, $k = 2\pi/\lambda = 2\pi \cdot p/h = p/\hbar$

- Quanto mais bem definida a posição de uma partícula (pacote de onda mais estreito), menos definido será o momento dessa partícula (uma combinação maior de comprimentos de onda, e portanto de momentos, é necessário)

Princípio da Incerteza

- O Princípio da Incerteza também pode ser enunciado em termos da energia e do tempo.
- Das propriedades do pacote de onda, tem-se que:

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq 1/2$$

- como

$$E = h\nu = h \cdot \omega/2\pi = \hbar\omega$$

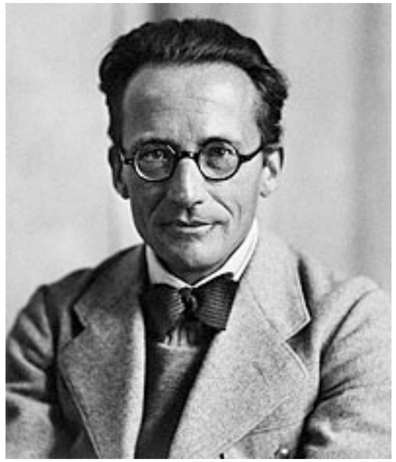
- portanto:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$$

Limitações da “Antiga” Teoria Quântica

- A hipótese de de Broglie associa propriedades ondulatórias com a matéria mas não diz como essas propriedades evoluem no tempo e espaço, ou seja, não determina de maneira exata a função de onda
- Ela também não diz como tratar sistemas em que o comprimento de onda não é constante, ou seja, quando forças estão presentes no sistema físico em estudo
- E não fornece uma relação quantitativa entre todas as propriedades ondulatórias (função de onda) e as propriedades corpusculares (observáveis) das partículas

Teoria de Schroedinger



- Em 1925, Erwin Schroedinger desenvolve uma teoria para descrever o comportamento das funções de onda
- Ele propõe uma equação que permite obter a forma matemática da função de onda.
- Essa equação depende do potencial, isto é, das forças presentes no problema em questão
- Essa equação não pode ser deduzida, mas podemos dar um "palpite bem fundamentado" e verificar se a teoria descreve bem a natureza

Teoria de Schroedinger

- Essa equação deve ser consistente com as hipóteses de Einstein e de Broglie
- Ela deve reproduzir a conservação de energia
- Deve ser linear, para contemplar o princípio da superposição
- Vamos considerar o caso da partícula livre inicialmente

Função de onda de uma Partícula Livre

- A partir disso chegamos na equação de Schroedinger unidimensional para a partícula livre que é dada por:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(x,t) + V_0\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,t)$$

- E a sua solução pode ser escrita como:

$$\Psi(x,t) = A\left[cos(kx-\omega t) + i\cdot sen(kx-\omega t)\right] = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

Função de onda de uma Partícula Livre

- A função de onda é uma função matemática complexa, portanto não pode ser medida diretamente
- Ela deve ser interpretada mais como um "guia" para se obter as grandezas realmente mensuráveis, chamadas de observáveis
- Como podemos agora relacionar essa função de onda com grandezas observáveis?

Funções de onda segundo Born

- Em 1926, Max Born propõe uma forma de relacionar as funções de onda com o comportamento das partículas que elas descrevem
- Segundo Born, o módulo da função de onda ao quadrado

  $$|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$$

  fornece a probabilidade da partícula ser encontrada no instante *t* em uma coordenada entre *x* e *x* + *dx*

  $$P(x,t)dx = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx$$

Normalização da Função de Onda

- A constante *A* que aparece multiplicando a função de onda

  $$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

  permite a **normalização** da mesma, isto é, seu valor deve ser tal que

  $$\int_{-\infty}^{\infty} P(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx = 1$$

Função de onda de uma Partícula Livre

- A partir dessa interpretação, nota-se que a função de onda da partícula livre não pode ser normalizada dessa maneira, pois

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x,t)dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(kx-wt)} \cdot e^{i(kx-wt)} dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x,t)dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx = 1$$

que leva a $A \rightarrow 0$

Função de onda de uma Partícula Livre

- Essa expressão nos diz o valor exato do momento e energia da partícula, porém sua posição em um certo instante de tempo é totalmente desconhecida
- Lembrando que a equação de Schroedinger é linear, podemos escrever uma solução dada por

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cdot e^{i(kx-wt)} dk$$

que é o pacote de onda que vimos anteriormente, sendo que *A(k)* pode ser obtida a partir das técnicas de Fourier e impondo a normalização da função de onda

Observáveis

- Como podemos agora relacionar essa função de onda com grandezas observáveis?
  - A interpretação probabilística de Born é o caminho para isso
- Mas, afinal como podemos obter a posição, o momento ou a energia de uma partícula a partir da função de onda, que é o que podemos determinar de maneira exata no mundo quântico?

Observáveis: Valor Esperado

- Diante da interpretação probabilística de Born, podemos obter apenas valores médios ou **valores esperados** para as grandezas

- Por exemplo, podemos obter o valor esperado para a posição de uma partícula a partir da expressão:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)x\Psi(x,t)dx$$

Observáveis:
Valor Esperado

- Podemos generalizar esse resultado para qualquer grandeza que dependa apenas da posição *x*:

$$f(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t) f(x) \Psi(x,t) dx$$

- Mas, como calcular o valor esperado para o momento ou energia da partícula?

Observáveis:
Valor Esperado

- Na física quântica, qualquer grandeza é obtida a partir de um operador quântico aplicado à função de onda
- No caso da posição o operador é o próprio valor da posição, ou seja

$$\hat{x} \leftrightarrow x$$

- No caso do momento, o operador é dado por:

$$\hat{p} \leftrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

- E no caso da energia $\hat{E} \leftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

Observáveis: Valor Esperado

- Com isso, temos que o valor esperado para qualquer grandeza que dependa da posição, do momento e do tempo é dado por:

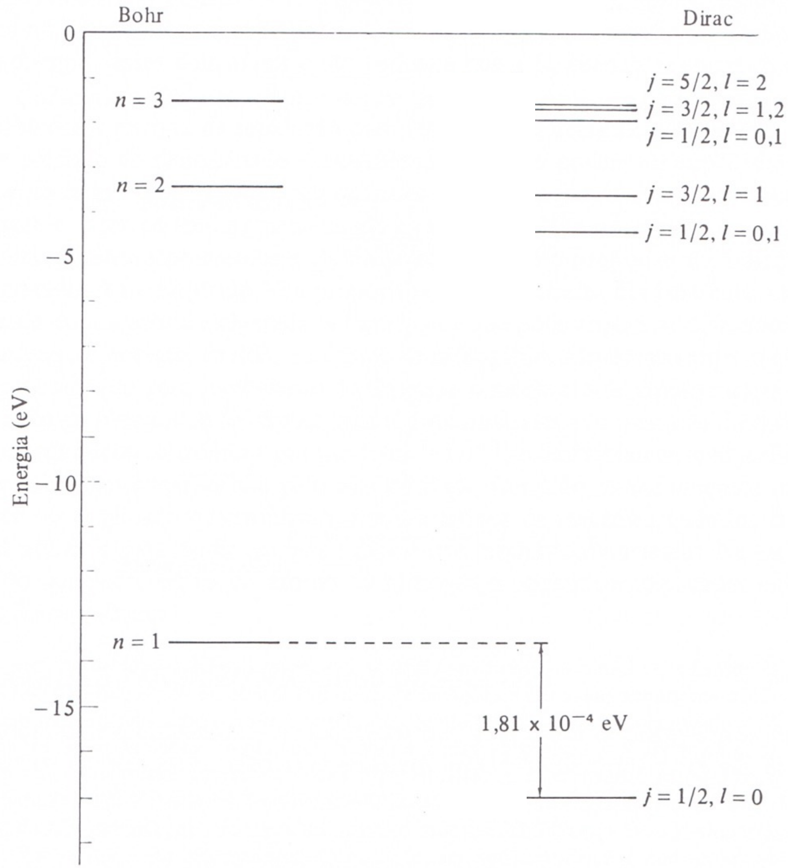
$$\bar{f}(x,p,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\hat{f}\left(x, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, t\right)\Psi(x,t)dx$$

Limitações

- Apesar de bem sucedida em vários aspectos, a teoria de Schroedinger apresenta sérias limitações

- Por exemplo, os níveis de energia do átomo mais simples, do hidrogênio, não são precisamente descritos por essa teoria.

- Isso só é obtido considerando-se o *spin* do elétron, que é "estranho" a essa teoria.



Limitações

- E há outras limitações mais fundamentais:
  - Inconsistência com a Relatividade Restrita
  - Como descrever o comportamento dual da radiação eletromagnética? Como dar conta, por exemplo, da criação de fótons em um processo envolvendo radiação eletromagnética? Os fótons têm uma função de onda?

Discussão da Próxima Aula

- Vimos no bloco anterior e na discussão desta aula, vários aspectos, principalmente empíricos, da dualidade onda-partícula
  - Na sua opinião, o formalismo da eq. de Schroedinger ajuda a compreender esse conceito? Ele é necessário para o professor ter autonomia para discutir esse aspecto fundamental da MQ no EM?
  - Procure trazer tópicos da FMC (se possível, curiosidades dos alunos) e a conexão desses tópicos com o conceito da dualidade e o formalismo de Schroedinger