aula de 27 de outubro

PROPOSIÇÃO: Seja V um espaço vetorial de dimensão n e seja W um subespaço de V. Então W é finitamente gerado e $\dim W \leq n$.

Demonstração: Se $W = \{0\}$, nada a fazer, pois $W = [\emptyset]$.

Suponha então que $W \neq \{0\}$ e seja $S \subset W$ tal que $[S] = W$. Seja $C \subset S$ o maior subconjunto LI. $C \neq \{0\}$, pois como $W \neq \{0\}$, e $[S] = W$, existe pelo menos $0 \neq w \in S$ e $\{w\}$ é LI.

Então C é LI, $C \subset W$ e $W \subset V$. Logo C é um subconjunto LI de V e como já vimos que todo conjunto com mais do que $n = \dim V$ é LD, então o número de vetores em C é $\leq n = \dim V$.

Só falta mostrar que $[C] = V$.

Para isso, seja $u \in S$ tal que $u \notin C$.

Pela hipótese de C ser o maior subconjunto LI contido em S temos que $C \cup \{u\}$ é LD.. Como C é LI, então $u \in [C]$. Assim $[S] \subset [C]$. Logo $W \subset [C]$

$\Rightarrow W = [C]$ e C é uma base de W.

Exemplos:

(1) Seja $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tais que $x_1 + x_4 = x_3 + x_2\}$.
Determine uma base de W e $\dim W$.

Vamos descobrir um conjunto gerador de W:

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in W \iff x_1 + x_4 = x_2 + x_3 \iff x_1 = x_2 + x_3 - x_4$.

Logo $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) =$

$(x_2, x_2, 0, 0) + (x_3, 0, x_3, 0) + (-x_4, 0, 0, x_4) =$

$$= x_2(1,1,0,0) + x_3(1,0,1,0) + x_4(-1,0,0,1).$$

Assim $W = [(1,1,0,0), (1,0,1,0), (-1,0,0,1)]$

Note que esses vetores são LI

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mas aqui, basta olhar que se

$$x_2(1,1,0,0) + x_3(1,0,1,0) + x_4(-1,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

$$(x_2+x_3-x_4, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0,0) \Rightarrow x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

(2) Seja W o subespaço de $P_3(\mathbb{R})$,

$$W = [S].$$

$$S = \{\underbrace{t^2-1}_{f_1},\ \underbrace{t^3-t^2-1}_{f_2},\ \underbrace{t^4+4t-2}_{f_3},\ \underbrace{2t-1}_{f_4}\}$$

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 = 0$$

$$x_1(t^2-1) + x_2(t^3-t^2-1) + x_3(t^4+4t-2) + x_4(2t-1) = 0.$$

$$(-x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4).1 + (4x_3 + 2x_4)t$$
$$+ (x_1 - x_2)t^2 + (x_2 + x_3)t^3 = 0$$

$$\begin{array}{l} -(x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4) = 0 \\ 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array}$$

5

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

São LI $\quad W = P_3(\mathbb{R})$.

(3) Quais são TODOS os subespaços de $\mathbb{R}^3$?

$W \subset \mathbb{R}^3$ subespaço.

$\dim W = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$ $\quad \dim W = 0 \Rightarrow W = \{0\}$

$\dim W = 1$

Base de W $\quad B_W = \{w\}$, $w \neq 0$

$\dim W = 2$ $\quad \dim W = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

São LI $\quad W = P_3(\mathbb{R})$.

(3) Quais são TODOS os subespaços de $\mathbb{R}^3$?

$W \subset \mathbb{R}^3$ subespaço.

$\dim W = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$

$\dim W = 0 \Rightarrow W = \{0\}$

$\dim W = 1$

Base de W $\quad B_W = \{w\}$, $w \neq 0$

$\dim W = 2$ $\qquad \dim W = 3$

(4) $$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$ sistema de m equações e n incógnitas

$W = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \ldots, x_n)$ é solução de $(*) \}$.

W é subespaço de $\mathbb{R}^n$ e $\dim W =$ nº de pivôs na forma escalonada da matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Sistema Linear Homogêneo

$S = \{$ soluções do sistema $\}$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + \cdots + a_{2n} x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

$S = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \ldots, x_n)$ é sol de $(*) \}$

S é subespaço de $\mathbb{R}^n$.

dim S = nº de variáveis livres

= (nº de incógnitas) − (nº de pivôs do sistema na matriz escalonada)

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$$

$$x_4 + 2x_5 = 0$$

$$x_5 = 0$$

$$\begin{cases} x_4 = x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$$

$$(-2x_2 - x_3, x_2, x_3, 0, 0) = -x_2(-2, 1, 0, 0, 0)$$

$$+ x_3(-1, 0, 1, 0, 0)$$

$$S = [(-2, 1, 0, 0, 0), (-1, 0, 1, 0, 0)]$$