Os números naturais e o conjunto $\mathbb{N}$ - definições

- Na Teoria dos Conjuntos, queremos, a partir do axiomas (que veremos depois), construir todos os "objetos matemáticos" que usamos (e na verdade "toda a matemática").
Bom, acho que o mais "básico" deles são os números naturais.

Problema: Como definir um número natural n?
Por exemplo, como definir o número 2?

- Pensando intuitivamente no que caracteriza o "2", podemos chegar em:

- é o que tem em comum entre todos os conjuntos com 2 elementos, "é uma abstração" que criamos para indicar isso
  - problema! não podemos usar o "2" para definir o "2".

Para corrigir este problema podemos pensar/colocar esta ideia de uma forma um pouco diferente (fixando um conj. com 2 elementos):

- é o que tem em comum entre todos os conjuntos que tem o mesmo número de elementos que um conjunto fixado, por exemplo $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

teremos um axioma que garante a existência do conjunto vazio e outro que diz que se A e B são conjuntos, então $\{A, B\}$ é conjunto (por isso peguei esse).

• Mas se não temos ainda os números naturais, não podemos contar quantos elementos tem em cada conjunto. Então temos ainda o seguinte problema?

Problema: Como falar em "ter o mesmo número de elementos" sem falar em números?

Exemplo: Em uma sala de aula, como podemos saber se tem o mesmo número de cadeiras e alunos na sala, sem precisar contar quantos alunos e cadeiras tem?

Note que como cada aluno senta em uma única cadeira, basta ver se tem alunos ou cadeiras sobrando. Se não tiver, teremos o mesmo número.

O que foi feito: uma associação de uma única cadeira a um único aluno. Se isso nos der uma função bijetora, as quantidades são iguais

• Isso motiva a seguinte definição:

Def: Dois conjuntos A e B são equipotentes (ou tem a mesma cardinalidade) se existe uma função bijetora $f: A \to B$.

Notação: $A \sim B$ ou $|A| = |B|$

$\Leftrightarrow$ "cardinalidade de A é igual a cardinalidade de B"

Exemplos: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \sim \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

$\mathbb{R}_+ \sim \mathbb{R}_-$

$\mathbb{N} \sim \{2k;\ k \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{R} \not\sim \mathbb{N}, \quad \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

} voltaremos a isso depois quando estudarmos conjuntos finitos, infinitos, enumeráveis e não enumeráveis.

Propriedades: Para A, B e C conjuntos quaisquer, temos que:

(a) $A \sim A$

(b) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

(c) $A \sim B$ e $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

Dem: Exercício (voltaremos a isso mais para frente no curso). o foco principal nesse momento não é falar de conjuntos equipotentes).

Logo, "ser equipotente" funciona como uma "relação de equivalência" no "conjunto de todos os conjuntos". Mas o problema é que não existe tal conjunto (como veremos depois). Por isso não podemos definir, por exemplo, $2 = [\{\emptyset, \{\emptyset\}\}]_\sim$

Agora, temos pelo menos duas formas de usar a ideia de considerar "o que tem em comum a todos os objetos equivalentes", ou seja, de usar a "relação de equivalência": usar as classes de equivalência ou trabalhar com representantes. Usar as classes de equivalência já vimos de não dá, não vai ser conjunto. Nos resta a ideia de usar os representantes (que no caso geral tem que usar o Axioma de Escolha, mas no finito não). É isso que vamos fazer e dá para escolher os representantes de uma forma natural:

• Definição dos números naturais:

↳ aqui nos referimos a um nº natural de forma informal, usando a noção que temos. Definiremos depois o que é um nº natural.

$\boxed{0 = \emptyset}$

$1 = \{\emptyset\}$

$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0,1\}$

$3 = \{0,1,2\} = 2 \cup \{2\}$

⋮

$8 = 7 \cup \{7\}$ etc

De modo geral define-se $n = \{0,1,\dots,n-1\}$, ou seja,

$$\boxed{n+1 = n \cup \{n\}}$$

• **Obs:** Assim, para nós, um número natural n será um conjunto de nºs (os que são menores que ele), mas isso terá que ser mostrado depois.

Essa ideia pode servir para definir um número natural específico. Mas como definir $\mathbb{N}$?

• Note que acima definimos cada número n, mas não definimos "n ser um número natural", ou seja, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

Qualquer número n pode ser definido como acima, pois conseguimos, a partir do 0, chegar na definição de n em um número finito de passos. Para definir todos os nºs naturais, precisaria ser um processo infinito, o que não pode ser. Na lógica que usamos, só é permitido um número finito de passos (tanto para definições como para demonstrações).

A definição do conjunto $\mathbb{N}$

O processo que fizemos para definir $\underline{n}$ não nos dará uma definição de $\mathbb{N}$, ou seja, uma definição do tipo "um número natural é ...", que é o que precisamos ter também. Temos que fazer algo diferente.

Para chegar na definição de $\mathbb{N}$ vamos observar com mais cuidado o que foi feito.

Primeiro note que sempre obtemos o próximo "número natural" (pensando intuitivam/e) adicionando mais um elemento ao número anterior:

$3 = 2 \cup \{2\}$
$4 = 3 \cup \{3\}$ etc

Def: O ~~sucessor~~ de um conjunto x é o conjunto $x \cup \{x\}$

Notação: $S(x) = x \cup \{x\} = x+1$

Como ~~[illegible]~~ então definir o $\mathbb{N}$? O que caracteriza um número natural?

Se olharmos como construímos os "números naturais" acima, podemos resumir a nossa ideia de "número natural" por:

(a) $\underline{0}$ é um nº natural,
(b) se n é um nº natural, então $n+1$ também é
(c) todos os números naturais são obtidos por (a) e (b), ou seja, a partir do 0 aplicando (b) várias vezes (um número finito de vezes).

· Usando essa ideia podemos definir $\mathbb{N}$:

<u>Def</u>: O conjunto (dos <u>números</u> <u>naturais</u>) $\mathbb{N}$ é o menor conjunto I que satisfaz: (a) $0 \in I$

(b) $x \in I \to S(x) \in I$.

Os elementos de $\mathbb{N}$ são chamados de <u>números</u> <u>naturais</u>

Um conjunto satisfazendo (a) e (b) é chamado de <u>conjunto</u> <u>indutivo</u>

<u>Obs</u>: Na definição acima, o "menor" é o menor no sentido de inclusão, ou seja, se A é um conjunto satisfazendo (a) e (b), então $\mathbb{N} \subset A$.

<u>Obs</u>: Fica ainda o problema da existência de algum conjunto indutivo. Isso será garantido axiomaticamente (será o "Axioma do Infinito" pois é equivalente a existência de um conjunto infinito). Existindo algum é fácil mostrar que existe o menor deles; basta tomar a intersecção de todos os conjuntos indutivos.

Assim podemos definir

$$\mathbb{N} = \bigcap \{ I : I \text{ é um conjunto indutivo} \}$$

↳ Fica como exercício mostrar que esse conjunto é um conjunto indutivo e que é o menor deles (ou seja, essa definição de $\mathbb{N}$ é equivalente a dimos anteriormente)

<u>Obs</u>: Um número natural, por definição, é um elemento de $\mathbb{N}$. Terá que ser mostrado, por exemplo, que $\forall n \in \mathbb{N}\ n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.