No exemplo

$H_0: \mu = \mu_0$ (18) μ_0 e μ_1 especificados

$H_a: \mu = \mu_1$ (14) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 conhecido

Hipóteses da forma $\mu = \mu_0$ ($\mu = 14$, $\mu = 18$, $\mu = 2$) são chamadas hipóteses simples.

Os testes mais comuns são da forma

$H_0: \mu = \mu_0 \rightarrow$ simples
$H_a: \mu \neq \mu_0 \rightarrow$ composta
} Teste Bicaudal

$H_0: \mu = \mu_0 \rightarrow$ simples
$H_a: \mu > \mu_0 \rightarrow$ composta
} Teste Unicaudal à direita

$H_0: \mu = \mu_0 \rightarrow$ simples
$H_a: \mu < \mu_0 \rightarrow$ composta
} Teste Unicaudal à esquerda

A Região Crítica do teste

$H_0: \mu = 18$ $\quad X \sim N(\mu, 36)$

$H_a: \mu = 14$ $\quad n = 36 \quad \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{36}{30}\right)$

$\bar{X} \leq 16{,}2 \quad \alpha = 0{,}05$

é a mesma do teste unilateral à esquerda

$H_0: \mu = 18$

$H_a: \mu < 18$

De modo geral se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 conhecido

a) Teste unicaudal à esquerda

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_a: \mu < \mu_0$

RC: $\bar{X} \leq x_c$ $\quad x_c$ tal que

$$P(\bar{X} \leq x_c \mid \mu = \mu_0) = \alpha$$

b) Teste unicaudal à direita

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_a: \mu > \mu_0$

RC: $\bar{X} \geq x_c$, x_c tal que

$P(\bar{X} \geq x_c \mid \mu = \mu_0) = \alpha$

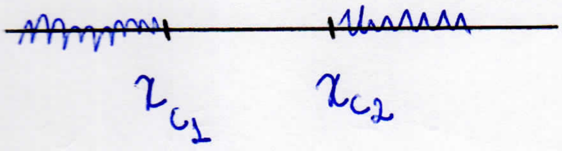
c) Teste bicaudal

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_a: \mu \neq \mu_0$

RC: $\bar{X} \geq x_{c_2}$ ou $\bar{X} \leq x_{c_1}$, x_{c_1} e x_{c_2} tais que

$P(\bar{X} \leq x_{c_1} \mid \mu = \mu_0) = \dfrac{\alpha}{2}$ e $P(\bar{X} \geq x_{c_2} \mid \mu = \mu_0) = \dfrac{\alpha}{2}$



Procedimento Geral de Testes de Hipóteses

1) Estabelecer H_0 e H_a.

2) Identificar o estimador a ser utilizado na tomada de decisões, sua distribuição e calcular sua estimativa.

Esse estimador é denominado "Estatística do Teste".

3) Definir a forma da Região Crítica.

4) Fixar α e obter a Região Crítica.

5) Concluir com base na estimativa e na Região Crítica.

6) Interpretar a decisão.

Exemplo 8.3 Magalhães e Lima pag 268

O tempo de reação de seres vivos a um estímulo tem distribuição normal com média 8 e desvio padrão 2. Um pesquisador acredita que o uso de uma substância altera o tempo médio de reação. Para isso, desenvolveu-se um experimento em que 10 cobaias receberam a substância e foram submetidas ao estímulo. Os tempos de reação (em segundos) para essa amostra foram

9,1 9,3 7,2 7,5 13,3 10,9 7,2
9,9 8,0 8,6

Teste as hipóteses de interesse ao nível de significância $\alpha = 0{,}06$.

X - tempo de reação de seres vivos sujeitos à substância

$X \sim N(\mu, 4)$

$H_0: \mu = 8$ a substância não altera o tempo médio de reação

$H_a: \mu \neq 8$ a substância altera o tempo médio de reação.

Estatística do Teste: $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{4}{10}\right)$

desconhecido $\quad \sigma^2/n$

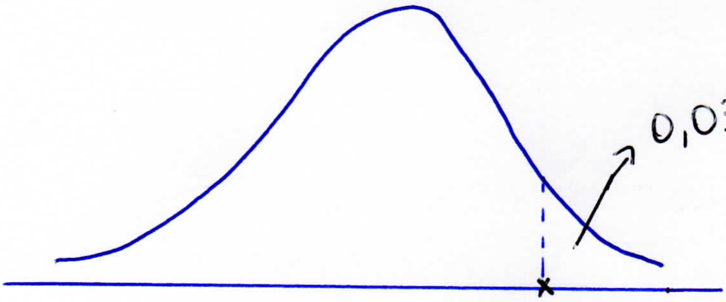
$$RC = \{ \bar{X} \mid \bar{X} \leq x_{c_1} \text{ ou } \bar{X} \geq x_{c_2} \}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}03 = P(\bar{X} \leq x_{c_1} \mid \mu = 8) \quad \text{e}$$

$$0{,}03 = P(\bar{X} \geq x_{c_2} \mid \mu = 8) = P\left(\frac{\bar{X} - 8}{2/\sqrt{10}} \geq \frac{x_{c_2} - 8}{2/\sqrt{10}} \right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{x_{c_2} - 8}{2/\sqrt{10}} \right) \qquad Z \sim N(0,1)$$

$\hookrightarrow \bar{X} \sim N\left(8, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$



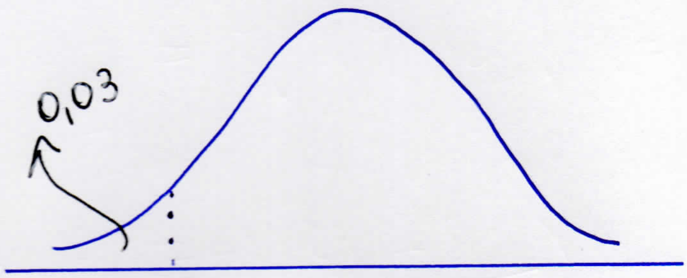
$$\frac{x_{c_2}-8}{2/\sqrt{10}} = 1{,}88$$

$$x_{c_2} = 8 + 1{,}88 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = 9{,}2$$

Analogamente

$$P(\bar{X} \leq c_1 \mid \mu = 8) = P\left(\frac{\bar{X}-8}{2/\sqrt{10}} \leq \frac{x_{c_1}-8}{2/\sqrt{10}}\right) =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{x_{c_1}-8}{2/\sqrt{10}}\right) = 0{,}03$$



$$x_{c_1} = 8 - 1{,}88 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = 6{,}8$$

$$\frac{x_{c_1}-8}{2/\sqrt{10}} = -1{,}88$$

$RC = \{ \bar{X} \mid \bar{X} \leq 6{,}8 \text{ ou } \bar{X} \geq 9{,}2 \}$

Para os dados, $\bar{x}_{obs} = 9{,}1 \notin RC$

Não rejeitamos H_0 ao nível de significância de 0,06.

Ao nível de significância de 0,06, os dados sugerem que o tempo médio de reação das cobaias não se altera quando submetidas à substância.

Obs: Cálculo da Probabilidade do erro do tipo II para hipótese alternativa composta

(Casos a), b) e c)

$\beta = P(\text{erro do tipo II}) = P(\text{aceitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa})$

é calculado para valores especificados de μ sob H_1.

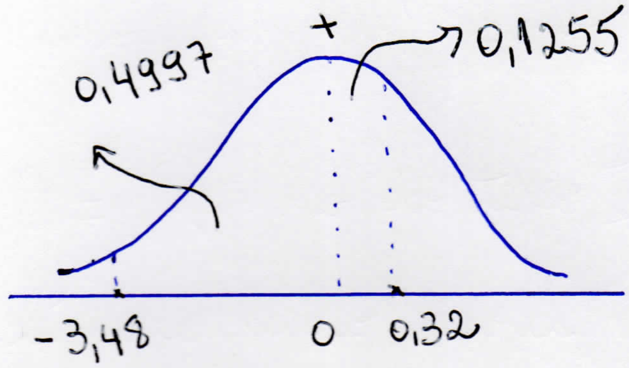
Para a RC construída, qual é a probabilidade de concluirmos indevidamente que a substância não altera o tempo médio de reação se $\mu = 9$?

$$\beta(9) = P(\text{aceitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa}, \mu = 9)$$

$$= P(\bar{X} \notin RC \mid \mu = 9) = P(6{,}8 < \bar{X} < 9{,}2 \mid \mu = 9)$$

$$= P\left(\frac{6{,}8 - 9}{2/\sqrt{10}} < \frac{\bar{X} - 9}{2/\sqrt{10}} < \frac{9{,}2 - 9}{2/\sqrt{10}} \right) =$$

$$= P(-3{,}48 < Z < 0{,}32) = 0{,}6252 \qquad Z \sim N(0,1)$$



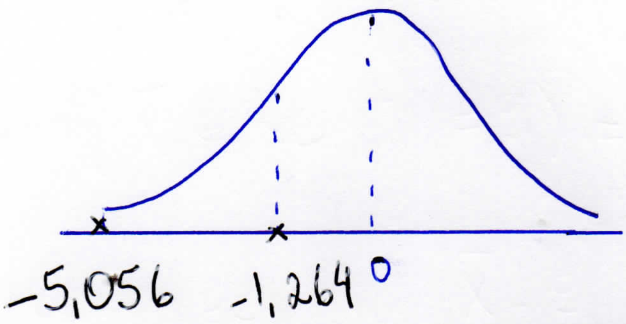
alta: amostra pequena, $\mu = 9$ relativamente próximo de $\mu = 8$

Para $\mu = 10$

$$\beta(10) = P\left(\frac{6{,}8-10}{2/\sqrt{10}} < Z < \frac{9{,}2-10}{2/\sqrt{10}}\right) =$$

$$= P(-5{,}056 < Z < -1{,}264) = 0{,}5 - 0{,}3962 =$$

$$= 0{,}1038$$



Se repetíssemos o cálculo para n maior a RC seria outra.
outro n

Def: Função Poder

Para testes de hipóteses com Ha composta, para avaliar o desempenho do teste, é definida a função poder

$$\Pi(\mu) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid \mu)$$

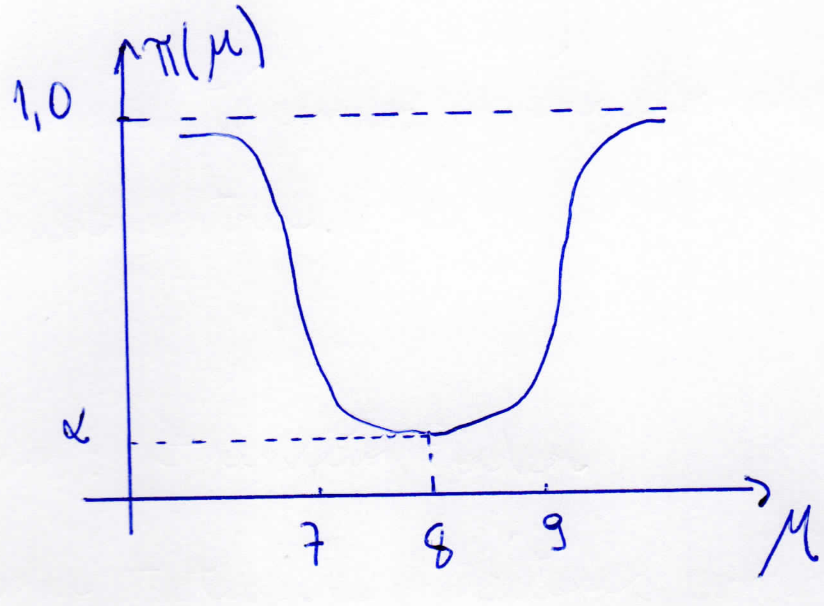
Ideal - alto para valores de μ na hipótese alternativa

No exemplo $H_0: \mu = 8$

$H_a: \mu \neq 8$

$$\Pi(8) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid \mu = 8) = \alpha$$

Alto poder para rejeitar hipóteses falsas



$$\beta(9) = 0{,}625 = P(\text{aceitar } H_0 \mid \mu = 9) =$$

$$= 1 - P(\text{rejeitar } H_0 \mid \mu = 9) = 1 - \Pi(9)$$

$$\Pi(9) = 1 - \beta(9)$$

Ex 2 Seção 8.2 Magalhães e Lima

$X \sim N(\mu, 25)$

$H_0: \mu = 10$ $\quad RC = \{\bar{X} \in \mathbb{R} \mid \bar{X} > 12\}$

$H_a: \mu = 14$ $\quad n = 25$

Determinar a probabilidade dos erros do tipo I e tipo II.

σ^2/n

$\bar{X} \sim N(\mu, 25/25)$

$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rej. } H_0 \mid H_0 \text{ é verd.}) = P(\bar{X} > 12 \mid \mu = 10)$

$= P\left(\frac{\bar{X}-10}{1} \geq \frac{12-10}{1}\right) = P(Z \geq 2) = 0{,}5 - 0{,}4772 =$

$= 0{,}0228$

$\bar{X} \sim N(0,1)$

$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{aceitar} \mid H_0 \text{ é falsa}) =$

$= P(\bar{X} \leq 12 \mid \mu = 14) = P\left(\frac{\bar{X}-14}{1} \leq \frac{12-14}{1}\right) =$

$= P(Z \leq -2) = P(Z > 2) = 0{,}0228.$

O tempo de vida de lâmpadas de certa marca tem distribuição normal com desvio padrão 120 horas. O fabricante afirma que a vida média das lâmpadas é 1650 horas. Uma amostra de 100 lâmpadas forneceu vida média de 1630 horas. Ao nível de significância de 0,05, temos evidências de que a afirmação do fabricante é correta?

X - Tempo de vida das lâmpadas $X \sim N(\mu, 120^2)$

$H_0: \mu = 1650$ afirmação do fab. é correta

$H_a: \mu < 1650$ afirmação do fab. é falsa

erro do tipo I - Concluir que o fabricante não está falando a verdade, quando ele fala a verdade.

erro do tipo II - concluir que o fabricante fala a verdade quando ele está mentindo.

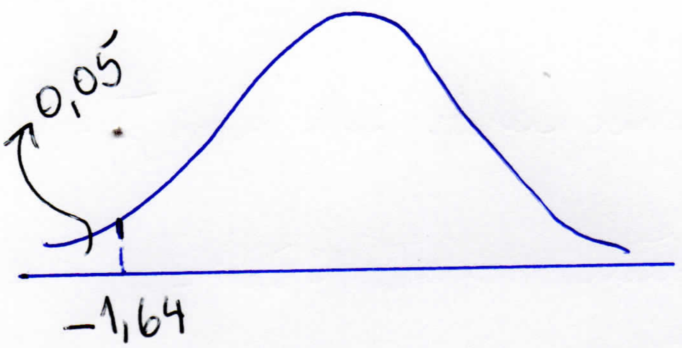
RC: $\bar{X} \leq x_c$

$$n = 100 \qquad \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{120^2}{100}\right)$$

$$P(\bar{X} \leq x_c \mid \mu = 1650) = 0{,}05 =$$

$$\bar{X} \sim N\left(1650, \frac{120^2}{100}\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - 1650}{120/10} \leq \frac{x_c - 1650}{12}\right) = P\left(Z \leq \frac{x_c - 1650}{12}\right)$$

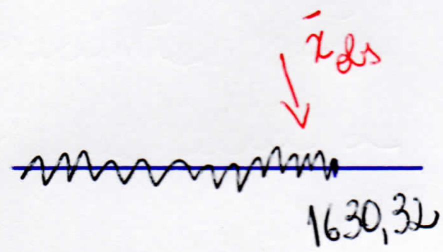


$$\frac{x_c - 1650}{12} = -1{,}64$$

$$x_c = 1630{,}32$$

Rejeitamos H_0 para $\bar{X} \leq 1630{,}32$.

$(RC = \{\bar{X} \in \mathbb{R} \mid \bar{X} \leq 1630{,}32\})$



$\bar{x}_{obs} = 1630 \in RC$

Rejeitamos H_0, ao nível de significância de 0,05, os dados sugerem que a afirmação do fabricante é incorreta.