

Correções : Ex 2, Seção 7.3 pag 243

Distribuições de Probabilidades de $\hat{\mu}_1$

$\hat{\mu}_1$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{6}$	3
p_i	0,75	0,16	0,04	0,04	0,0025	0,005	0,0025

3 - Testes de Hipóteses

Capítulo 8 - Magalhães e Lima

Introdução

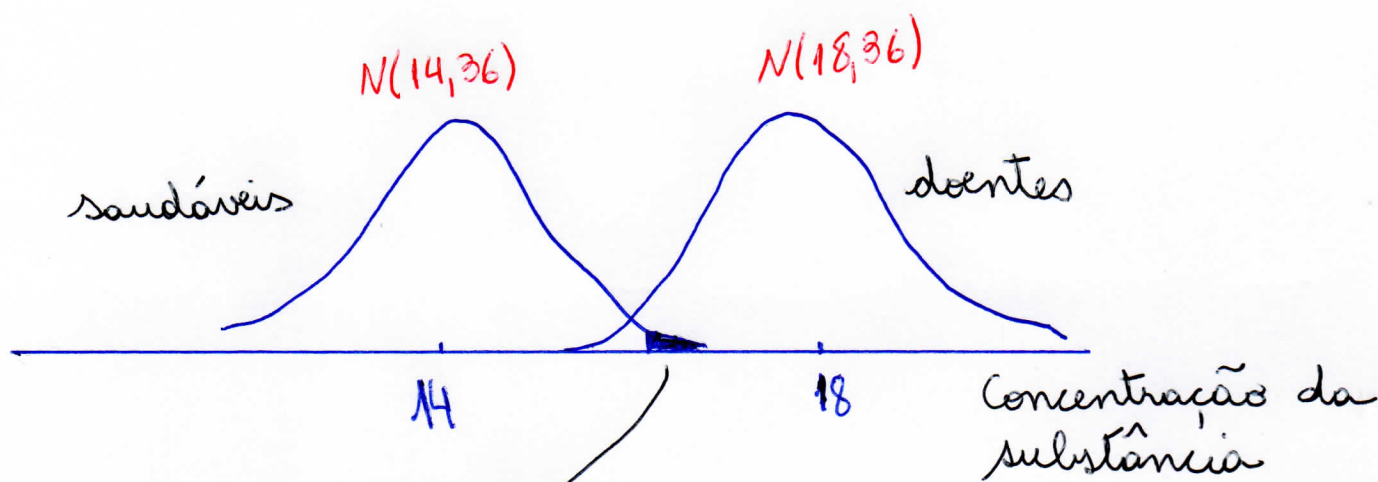
Pessoas saudáveis $\Rightarrow$ concentrações de uma substância no sangue $\sim N(14, 6^2)$

↓
unidades/ml

Portadores de uma doença $\Rightarrow$ concentrações da substância $\sim N(18, 6^2)$

X - Concentração da substância

2



Proporção de saúdáveis com concentrações tão alta quanto a dos doentes (pequena)

Deseja-se averiguar se um tratamento proposto para combater a doença é eficaz.

Tomou-se uma amostra aleatória de 30 indivíduos doentes submetidos ao tratamento

X_i - quantidade da substância no sangue do i -ésimo indivíduo, $i = 1, 2, \dots, 30$

$X_i \sim N(\mu, 36)$ μ desconhecido
 $\mu = 14$ ou $\mu = 18$

↙ Tratamento é eficiente
↓ Tratamento não é eficiente

Temos duas hipóteses

$$\begin{cases} H_0: \mu = 18 \text{ (o tratamento não é eficaz)} \\ H_a: \mu = 14 \text{ (o tratamento é eficaz)} \end{cases}$$

→ Teste de Hipóteses

Definição:

Hipótese estatística é qualquer afirmação sobre a forma ou sobre os parâmetros de uma distribuição de probabilidades. Em um teste de hipóteses

H_0 : (hipótese nula) - por conveniência técnica será sempre uma relação de igualdade

H_a : (hipótese alternativa) - deve ser complementar a H_0

Teste de hipóteses: consiste em tomar a decisão rejeitar ou não rejeitar H_0 com base na amostra e em uma regra de decisão.

4

No exemplo, calcula-se $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{30} X_i}{30}$, estimador de μ .

Se $\bar{X}$ estiver próximo de 18, não rejeito H_0 .

Se $\bar{X}$ estiver próximo de 14, rejeito H_0 .

"próximo" - depende da variabilidade de X e de $\bar{X}$, que serão levadas em conta na regra de decisão.

No exemplo, temos um teste de hipóteses para a média de uma distribuição normal com variância conhecida.

Teste de Hipóteses para a média μ da distribuição normal com variância conhecida

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \sigma^2 \text{ conhecida, } \mu \text{ desconhecida}$$

$$H_0: \mu = 18$$

$$H_a: \mu = 14$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad \text{estimador pontual de } \mu$$

Decisão - baseada no valor observado de $\bar{X}$

Seja $\bar{x}_{\text{es}}$ (estimativa de μ)

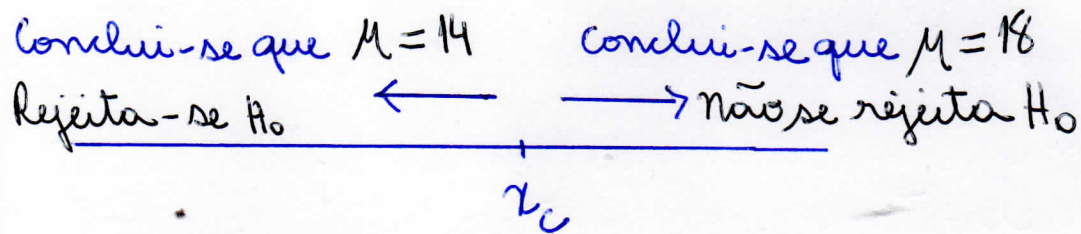
$$\text{Se } X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ então } \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\text{No caso } \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{36}{n}\right)$$

Possível regra de decisão

Se $\bar{X} > x_c$, concluímos que $\mu = 18$ e não rejeitamos H_0 .

Se $\bar{X} \leq x_c$, concluímos que $\mu = 14$ e rejeitamos H_0 .



$$H_0: \mu = 18$$

$$H_a: \mu = 14$$

Nesse procedimento, podemos cometer dois tipos de erro

erro do tipo I: rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira
(considerar o tratamento eficaz quando ele não é)

erro do tipo II: aceitar H_0 quando H_0 é falsa

(concluir que o tratamento não é eficaz quando ele é)

Geralmente é fixada

$$P(\text{erro do tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) \\ = \alpha \rightarrow \text{nível de significância do teste}$$

Define-se ainda

$$P(\text{erro do tipo II}) = \beta = P(\text{aceitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa})$$

Na prática α é fixado e a partir dele obtém-se x_c .

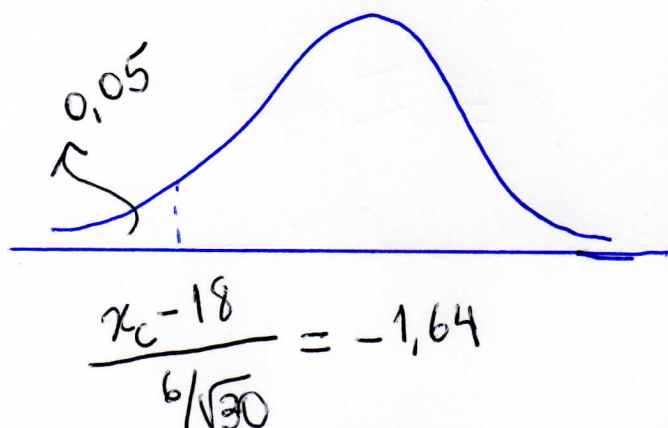
$\rightarrow$ geralmente 0,05, 0,01
no máximo 0,10

$$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) \\ = P(\bar{X} \leq x_c \mid \mu = 18) = P\left(\frac{\bar{X} - 18}{6/\sqrt{30}} \leq \frac{x_c - 18}{6/\sqrt{30}}\right)$$

Se $\mu = 18$, $\bar{X} \sim N(18, 36/30)$

$$= P\left(Z \leq \frac{x_c - 18}{6/\sqrt{30}}\right) \quad Z \sim N(0, 1)$$

Tomando $\alpha = 0,05$, $P\left(Z \leq \frac{x_c - 18}{6/\sqrt{30}}\right) = 0,05$

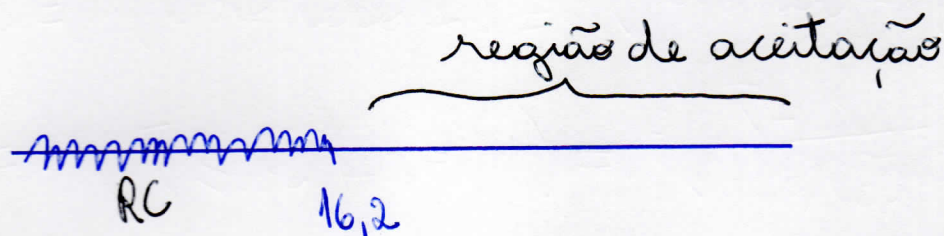


$$x_c = 18 - 1,64 \frac{6}{\sqrt{30}} = 16,2$$

Se $\bar{X}_{ds} \leq 16,2$, rejeitamos H_0 .

Este conjunto é denominado Região Crítica ou Região de Rejeição

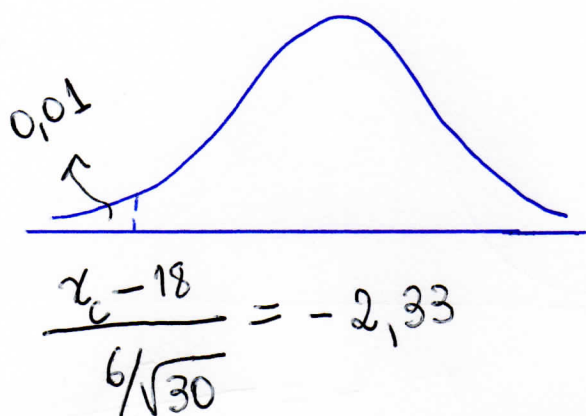
$$RC = \{ \bar{X}_{ds} \in \mathbb{R} \mid \bar{X}_{ds} \leq 16,2 \}$$



Supondo que a amostra forneceu a estimativa

$$\bar{x}_{ds} = 16,04, \quad 16,04 \in RC, \text{ rejeitamos } H_0.$$

Para $\alpha = 0,01$ teríamos

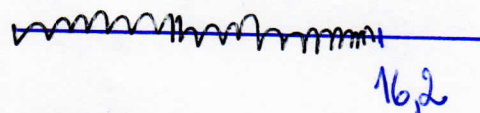


$$x_c = 18 - 2,33 \frac{6}{\sqrt{30}} = 15,44$$

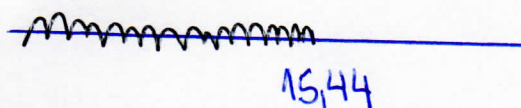
$$RC = \{ \bar{X}_{obs} \in \mathbb{R} \mid \bar{X}_{obs} \leq 15,44 \}$$

Para $\bar{X}_{obs} = 16,04$, não rejeitaríamos H_0 .

Para $\alpha = 0,05$ $RC: \bar{X}_{obs} \leq 16,2$



$\alpha = 0,01$ $RC: \bar{X}_{obs} \leq 15,44$



Rejeito para $\alpha = 0,01 \Rightarrow$ rejeito para $\alpha = 0,05$

Rejeito para $\alpha = 0,05 \Rightarrow$ posso ou não rejeitar para $\alpha = 0,01$

No exemplo, rejeitamos para $\alpha = 0,05$ mas não
para $\alpha = 0,01$

Cálculo de $\beta = P(\text{erro do tipo II})$ para a RC

$$\bar{X}_{\text{obs}} \leq 16,2 \quad (\text{com } \alpha = 0,05)$$

$$\beta = P(\text{aceitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa}) = P(\bar{X} > 16,2 \mid \mu = 14)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - 14}{6/\sqrt{30}} > \frac{16,2 - 14}{6/\sqrt{30}}\right) = P(Z > 2,005) =$$

$$\downarrow$$

$$\bar{X} \sim N\left(14, \frac{36}{30}\right)$$

$$Z \sim N(0,1)$$

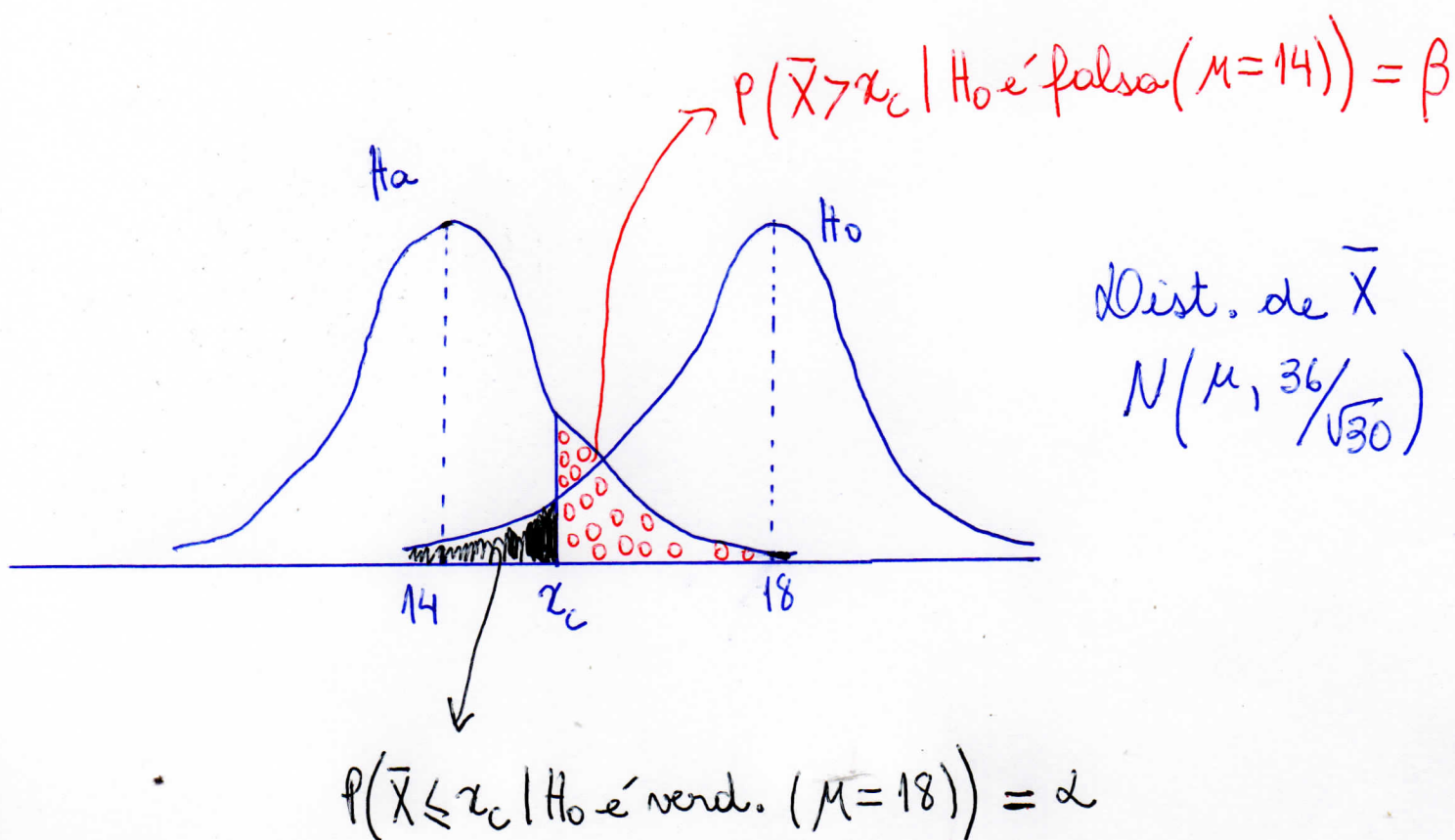
$$= 0,5 - 0,4778 = 0,0222$$

Cálculo de β para a RC $\bar{X}_{\text{obs}} \leq 15,44$ (com $\alpha = 0,01$)

$$\beta = P(\bar{X} > 15,44 \mid \mu = 14) = P\left(\frac{\bar{X} - 14}{6/\sqrt{30}} > \frac{15,44 - 14}{6/\sqrt{30}}\right)$$

$$= P(Z > 1,312) = 0,5 - 0,4049 = 0,095 \simeq 10\%$$

Diminuindo α , β aumenta



A única forma de diminuir α e β simultaneamente é aumentar o tamanho da amostra.

Verdade		Decisões	
		H_0	H_a
H_0	Decisão Correta		erro do tipo II: aceitar H_0 quando H_0 é falsa
H_a	erro do tipo I: rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira		Decisão Correta