RELEMBRANDO

Autovalores e Autovetores

↳ Dado um OL $\underbrace{T: V \to V}$, no caso em que $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ → autovalor de T

$\vec{v}$ → autovetor associado ao autovalor λ

$T: V \to V$ → $T(\vec{v}) = A\vec{v}$

A → matriz de transformação do OL

Polinômio Mínimo

Se todas as raízes têm multiplicidade $= 1 \Rightarrow PM = PC$

↳ Tem as mesmas raízes do PC, não necessariamente com a mesma multiplicidade.

PC → $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

↳ Polinômio que anula a matriz de transformação (A) do OL: $m(A) = 0$.

0 → matriz nula

↳ Como o PC anula a matriz do OL, o PM é o polinômio de menor grau entre aqueles que anulam A.

Slide 12 - Base de Autovetores

Teorema (1):

Autovetores associados a autovalores distintos são LI.

⇓ COROLÁRIO

Se houver tantos autovalores distintos quanto for a dimensão de um EV V, então V possui uma base cujos vetores são todos autovetores de T.

$T: V \to V$, $\dim(V) = \underline{\underline{n}}$.

Se houver $\underline{\underline{n}}$ autovalores $\Rightarrow \exists$ base de autovetores

Slide 13 - Exemplo

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\overbrace{T(x,y)}^{(x_1,y_1)} = (-3x+4y, -x+2y)$. Se possível, encontre uma base B de autovetores e observe de que tipo é a matriz de transformação em relação a essa base, $[T]_B$.

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A = [T]_C} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$A = [T]_C \to$ matriz de transformação do OL em relação à base canônica C.

$C = \{\vec{i}, \vec{j}\}$

Autovalores:

$\det(A - \lambda I) = \det([T]_C - \lambda I) = 0 \to \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ $\to$ Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $\dim(V) = 2$, garante-se a existência de uma base de autovetores.

Autovetores:

$(\underbrace{[T]_C - \lambda_i I}_{A})\vec{v}_i = \vec{0} \to$ $\vec{v}_1 = (1,1)$, $\vec{v}_2 = (4,1)$ $\to$ Autovetores associados a λ_1 e a λ_2, respectivamente.

são LI! $\nexists k \in \mathbb{R} / \vec{v}_1 = k\vec{v}_2$

Como $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ estão associados a autovalores distintos, são LI. E como $\dim(V) = 2$, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ formam uma base de autovetores do $\mathbb{R}^2$: $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Da definição de autovalores e autovetores: $T(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$. Portanto:

$$T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1 = 1\vec{v}_1 = 1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2$$

$$T(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2 = -2\vec{v}_2 = 0\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$$

$T(\vec{v}_i) \in V$, então escrever como CL dos vetores de B

$\xrightarrow{\text{matricialmente}}$

$$\begin{bmatrix} T(\vec{v}_1) \\ T(\vec{v}_2) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{[T]_B} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{bmatrix}$$

Assim, para $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, em que $\vec{v}_i$ são autovetores de T:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal, com a diagonal principal composta pelos autovalores de T $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$.

Será que foi acaso a matriz diagonal obtida no exemplo anterior?

<u>NÃO</u>

Dado $T: V \to V$, se for conhecida uma base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ de autovetores, sabe-se que:

$$T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1 + 0\,\vec{v}_2 + \dots + 0\,\vec{v}_n$$

$$T(\vec{v}_2) = 0\,\vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + 0\,\vec{v}_n$$

$$\vdots$$

$$T(\vec{v}_n) = 0\,\vec{v}_1 + 0\,\vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$$

$\downarrow$ matricialmente

$$\begin{bmatrix} T(\vec{v}_1) \\ T(\vec{v}_2) \\ \vdots \\ T(\vec{v}_n) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{[T]_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \text{ será uma matriz diagonal.}} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

A diagonal principal de $[T]_B$ será composta pelos autovalores λ_i de T.

<u>Observação</u>

Os autovalores λ_i não precisam ser todos distintos ($i \leq n$).

↳ Mais de um autovetor LI pode estar associado a um autovalor.

↳ Um autovalor se repetirá na diagonal principal de $[T]_B$ tantas vezes quantos forem os autovetores LI a ele associados.

Slide 16

DEFINIÇÃO: Operador Diagonalizável

Um OL $T: V \to V$ é diagonalizável $\Leftrightarrow$ existir uma base de autovetores.

Teorema (2): (modificado)

Sejam $T: V \to V$ um OL de dimensão $\underline{\underline{n}}$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ os autovalores distintos de T ($k \leq n$). As afirmações a seguir são equivalentes:

(i) T é diagonalizável $\rightarrow$ $\exists$ uma base de autovetores

(ii) $m(x) = (x-\lambda_1)^{1}(x-\lambda_2)^{1}\dots(x-\lambda_k)^{1}$ $\rightarrow$ PM tem as mesmas raízes do PC

Entre os candidatos, o PM será aquele em que todas as raízes têm multiplicidade = 1

Slide 19 - Exemplo

1) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\overbrace{T(x,y)}^{(x_1,y_1)} = (4y, x)$. Determine o PM de T e, se possível, determine uma base de autovetores e diagonalize o OL.

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A = [T]_C} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$A = [T]_C$, C ... base canônica

$\underline{\underline{PC}}$: $p(\lambda) = \det([T]_C - \lambda I) = (\lambda+2)(\lambda-2) \longrightarrow p(\lambda) = 0 \longrightarrow$ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ autovalores

$\underline{\underline{PM}}$: $\exists$ somente $\underline{\underline{1}}$ candidato a PM, que é o próprio PC.

Como $m(x) = (x+2)(x-2)$, T é diagonalizável, o que implica em $\exists$ uma base de autovetores do OL T.

*** Como $\dim(V) = 2$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 2 autovetores LI estão associados aos autovalores distintos e $\exists$ uma base de autovetores do OL T.

Autovetores: $([T]_c - \lambda_i I)\vec{v_i} = \vec{0}$

$\lambda_1 = 2$: $([T]_c - \lambda_1 I)\vec{v_1} = \vec{0}$, $\vec{v_1} = (x, y)$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \{ x - 2y = 0, \quad x = 2y \quad \therefore \quad \vec{v_1} = (2y, y)$$

$$\vec{v_1} = y\underline{(2,1)}, \; y \neq 0$$

$\lambda_2 = -2$: $([T]_c - \lambda_2 I)\vec{v_2} = \vec{0}$, $\vec{v_2} = (x, y)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \{ x + 2y = 0, \quad x = -2y \quad \therefore \quad \vec{v_2} = (-2y, y)$$

$$\vec{v_2} = y(-2,1), \; y \neq 0$$

$\begin{cases} \vec{v_1} = (2,1) \\ \vec{v_2} = (-2,1) \end{cases}$ são LI e $\dim(V) = 2$, logo $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ é base de autovetores.

Da definição de autovalores e autovetores:

$$T(\vec{v_1}) = \lambda_1 \vec{v_1} = 2\vec{v_1} = 2\vec{v_1} + 0\vec{v_2}$$

$$T(\vec{v_2}) = \lambda_2 \vec{v_2} = -2\vec{v_2} = 0\vec{v_1} - 2\vec{v_2}$$

$\hookrightarrow$ $T(\vec{v_i}) \in V$, então escrever como CL dos vetores de B

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} T(\vec{v_1}) \\ T(\vec{v_2}) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{[T]_B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)} \begin{bmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ a matriz de transformação do OL na base B de autovetores é uma matriz diagonal em que a diagonal é composta pelos autovalores de T.

*** Ex. (2)

Slide 20 - Exercícios

1) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\overbrace{T(x,y,z)}^{(x_1,y_1,z_1)} = (3x-4z, 3y+5z, -z)$.

Se possível, encontre uma base B de autovetores e $[T]_B$.

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A=[T]_C,\ C \dots \text{ base canônica}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

PC: $p(\lambda) = \det([T]_C - \lambda I) = (\lambda-3)^2(\lambda+1) \to p(\lambda)=0 \to \begin{cases} \lambda_1 = 3 \to \text{mult. } 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$ autovalores

PM: candidatos: $m_1(x) = (x-3)(x+1) \longrightarrow$ T será diagonalizável $\Leftrightarrow m_1([T]_C) = 0$

$m_2(x) = (x-3)^2(x+1)$

$$m_1([T]_C) = ([T]_C - 3I)([T]_C + I)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} //$$

Como $m_1([T]_C) = 0_{3\times3}$, T é diagonalizável. Então, existe uma base B de autovetores de T e $[T]_B = \text{diag}(\lambda i)$.

Foram encontrados somente $\underline{\underline{2}}$ autovalores distintos, mas como existe a base de autovetores e $\dim(V) = 3$, então devem ser encontrados $\underline{\underline{3}}$ autovetores LI.

Isso significa que a um dos autovalores, serão associados $\underline{\underline{2}}$ autovetores LI. Mas a qual será?

A multiplicidade indica o n. máximo de autovetores LI que podem ser associados a um autovalor. Neste caso, $\underline{\underline{2}}$ autovetores LI estarão associados a $\underline{\lambda_1 = 3}$.

Autovetores: $(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} = (x, y, z)$

$\lambda_1 = 3$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -4z = 0 \\ 5z = 0 \end{cases} \rightarrow z = 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\vec{v} = (x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) = x(1,0,0) + y(0,1,0)$$

Logo: $\boxed{\vec{v}_1 = (1,0,0) \text{ e } \vec{v}_2 = (0,1,0)}$ são os autovetores $\underline{\underline{LI}}$ associados a λ_1.

$\lambda_2 = -1$: $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4x - 4z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = z \\ y = -\frac{5}{4}z \end{matrix}$, $z \in \mathbb{R}$

$$\vec{u} = \left(z, -\frac{5}{4}z, z\right) = z\left(1, -\frac{5}{4}, 1\right) \xrightarrow{z=4} \boxed{\vec{u} = (4, -5, 4)}$$

Como $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são LI e associados a λ_1 e $\vec{u}$ está associado a um autovalor distinto (λ_2), garante-se a existência de uma base de autovetores de T, $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}\}$.

Da definição de autovalores e autovetores, tem-se:

$$\begin{aligned} T(\vec{v}_1) &= \lambda_1 \vec{v}_1 = 3\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{u} \\ T(\vec{v}_2) &= \lambda_1 \vec{v}_2 = 0\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + 0\vec{u} \\ T(\vec{u}) &= \lambda_2 \vec{u} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 - \vec{u} \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} T(\vec{v}_1) \\ T(\vec{v}_2) \\ T(\vec{u}) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{[T]_B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2)} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{u} \end{bmatrix}$$

Assim, para a base B de autovetores:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal, com a diagonal principal preenchida pelos autovalores de T.

$\lambda_1 = 3$ aparece $\underline{\underline{2}}$ vezes na diagonal porque há $\underline{\underline{2}}$ autovetores LI associados a ele.