

DEF. (1): Polinômio que anula a matriz

Se: $p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = \mathbf{0}$

↓ polinômio calculado na matriz

↓ matriz nula da ordem de A

Então:

O polinômio anula a matriz.

EXEMPLO:

$p_1(x)$ ou $p_2(x)$ anula A? Dados $\begin{cases} p_1(x) = x^2 - 9 \\ p_2(x) = 2x + 3 \end{cases}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$p_1(x) = x^2 - 9$. Se $p_1(x) = 0$, então anula A.
↳ matriz nula 2x2

$p_1(A) = A^2 - 9I$ ↗ A·A

$p_1(A) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$p_1(A) = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow p_1(A) = \mathbf{0}_{2 \times 2}$, então $p_1(x)$ anula A.

$p_2(x) = 2x + 3$. Se $p_2(x) = 0$, então anula A.
↳ matriz nula 2x2

$p_2(A) = 2A + 3I$

$p_2(A) = 2 \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$p_2(A) = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow p_2(A) \neq \mathbf{0}_{2 \times 2}$, então $p_2(x)$ não anula A.

Slide 07

TEOREMA: Cayley - Hamilton

Sejam o OL $T: V \rightarrow V$, uma base B de V e o PC $p(\lambda)$ de T . O PC anula a matriz de transformação de T na base B :

$$p([T]_B) = 0$$

↓
matriz de transformação do OL T na base B - matriz A

Slide 08

DEF. (2): Polinômio Mínimo

O polinômio mínimo (PM) de uma matriz quadrada A é o polinômio

$$m(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0$$

↓
 $a_k = 1$

que satisfaz:

a) $m(A) = 0 \rightarrow m(x)$ anula A

b) $m(x)$ é o polinômio de menor grau entre todos que anulam A .

↪ Pode haver mais de um polinômio que anula a matriz A , porém, somente o de menor grau será chamado de polinômio mínimo.

Observação: as raízes do PM são as mesmas do PC.

Slide 10 - Exemplos

1) OL $T: V \rightarrow V$ tal que B é base de V .

PC: $p(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda-1)^3(\lambda+5)$. Candidatos a PM de T ?

↓
PC é de grau 6, logo são 6 as suas raízes e $[T]_B = A_{6 \times 6}$

↓
 $\lambda=3$: raiz de multiplicidade 2

$\lambda=1$: raiz de multiplicidade 3

$\lambda=-5$: raiz de multiplicidade 1

Como o PM tem as mesmas raízes do PC, os candidatos a PM serão combinações das raízes do PC, do menor ao maior grau:

Combinações dos graus das raízes:

$\lambda \leftarrow x$

1	1	1	→	$m_1(x) = (x-3)(x-1)(x+5)$
2	1	1	→	$m_2(x) = (x-3)^2(x-1)(x+5)$
1	2	1	→	$m_3(x) = (x-3)(x-1)^2(x+5)$
2	2	1	→	$m_4(x) = (x-3)^2(x-1)^2(x+5)$
1	3	1	→	$m_5(x) = (x-3)(x-1)^3(x+5)$
2	3	1	→	$m_6(x) = (x-3)^2(x-1)^3(x+5)$

De $m_1(x)$ a $m_6(x)$ são candidatos a PM.

Calcular $m_i([T]_B)$, $i = 1, \dots, 6$. O polinômio de menor grau (menor i)

que anula a matriz, será o PM de T .

2) OL $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(\underbrace{x, y}_{(x_1, y_1)}) = (4y, x)$. PM de T ?

matricialmente: $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[T]_B} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$[T]_B = A_{2 \times 2} \Rightarrow p(\lambda) \text{ terá grau } 2$$

Para determinar o PM de T , é preciso conhecer o PC $p(\lambda)$ de T .

$$\text{PC: } p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 4 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda + 2)(\lambda - 2) = p(\lambda) \quad \swarrow \text{grau } 2$$

Como o PM tem as mesmas raízes do PC, o PM é o PC.

$$\lambda \leftarrow x : m(x) = (x + 2)(x - 2)$$

Verificando que $m(x)$ é o PM:

$$m(A) = (A + 2I)(A - 2I)$$

$$m(A) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$m(A) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m(A) = O_{2 \times 2} \quad \therefore \quad \underline{m(x) \text{ é o PM de } T}$$

Slide 11 - Exercícios

1) OL $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x+y+z, 2y+z, 3z)$. PM de T ?

Matricialmente: $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$[T]_B = A_{3 \times 3} \Rightarrow p(\lambda) \text{ terá grau } 3$$

Para determinar o PM de T , é preciso conhecer o PC $p(\lambda)$ de T .

PC : $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = p(\lambda)$$

matriz triangular superior: elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos e $\det(\cdot) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

Obs: matriz triangular inferior: elementos acima da diag. principal todos nulos.

Como o PM tem as mesmas raízes do PC, só há 1 candidato a PM, e é o próprio PC:

$$\lambda \leftarrow x: m(x) = -(x-1)(x-2)(x-3)$$

*** Para verificar que $m(x)$ está correto, calcular $m(A)$.

2) OL $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z)$. PM de T ?

matricialmente: $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{[T]_B = A_{3 \times 3}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$[T]_B = A_{3 \times 3} \Rightarrow p(\lambda)$ terá grau 3

Para determinar o PM de T , é preciso conhecer o PC $p(\lambda)$ de T .

PC: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 1 + 1 - (1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)^3 + 2\lambda - (1-\lambda) = \lambda^2(3-\lambda) = -\lambda^2(\lambda-3) = p(\lambda) \quad \leftarrow \text{grau 3}$$

O PM tem as mesmas raízes do PC. Logo, são candidatos a mínimos:

$$m_1(x) = -x(x-3)$$

$$m_2(x) = -x^2(x-3)$$

$m_1(A) = 0$? Se sim, $m_1(x)$ é PM; se não, $m_2(x)$ será PM.

$$m_1(A) = -A(A-3I)$$

$$m_1(A) = - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$m_1(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{3 \times 3}$$

$$\therefore m_1(x) = -x(x-3) \text{ é o PM de } T$$