2a. Lista de Exercícios SLC 0608 - Cálculo II
segundo semestre de 2020

Integrais duplas

1. Seja A o retângulo $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$. Calcule $\int\int_A f(x,y)dxdy$ sendo $f(x,y)$ igual a

a) $x+2y$ b) $x-y$ c) $\sqrt{x+y}$ d) $\frac{1}{x+y}$ e) $x\cos(xy)$

e) $y\cos(xy)$ f) $\frac{1}{(x+y)^2}$ g) ye^{xy} h) xy^2 i) $x\sin(\pi y)$

2. Sejam $f(x)$ e $g(y)$ funções contínuas, respectivamente, nos intervalos $[a,b]$ e $[c,d]$. Prove que

$$\int\int_A f(x)g(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)$$

onde A é o retângulo $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$.

3. Utilizando o exercício 2, calcule

a) $\int\int_A xy^2\,dxdy$, onde A é o retângulo $1 \leq x \leq 2$, $2 \leq y \leq 3$

b) $\int\int_A x\cos y\,dxdy$, onde A é o retângulo $0 \leq x \leq 1$, $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$

c) $\int\int_A x\ln y\,dxdy$, onde A é o retângulo $0 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$

d) $\int\int_A xye^{x^2-y^2}\,dxdy$, onde A é o retângulo $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 3$

e) $\int\int_A \frac{\sin^2 x}{1+4y^2}\,dxdy$, onde A é o retângulo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$

4. Calcule o volume do conjunto dado

a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq x+2y\}$

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq \sqrt{xy}\}$

c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq xye^{x^2-y^2}\}$

d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ x^2+y^2 \leq z \leq 2\}$

e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1,\ x+y \leq z \leq x+y+2\}$

f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 1 \leq z \leq e^{x+y}\}$

5. Calcule $\int\int ydxdy$ onde B é o conjunto dado

a) B é o triângulo de vertices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq x + 2\}$

c) B a região compreendida entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2$, com $0 \leq x \leq 2$

d) B é o semicírculo $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$

e) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0,\, x^5 - x \leq y \leq 0\}$

6. Calcule $\displaystyle\int\int_B f(x, y)dxdy$ sendo dado:

a) $f(x, y) = x \cos y$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0,\, x^2 \leq y \leq pi\}$

b) $f(x, y) = xy$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2,\, y \leq x,\, x \geq 0\}$

c) $f(x, y) = xy\sqrt{x^2 + y^2}$ e B o retângulo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

d) $f(x, y) = \frac{1}{\ln y}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2 \leq y \leq 3,\, 0 \leq x \leq \frac{1}{y}\}$

e) $f(x, y) = xy \cos x^2$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1,\, x^2 \leq y \leq 1\}$

7. Inverta a ordem de integração

a) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^x f(x, y)dy\right] dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_{x^2}^x f(x, y)dy\right] dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)dx\right] dy$ d) $\displaystyle\int_1^e \left[\int_{\ln x}^x f(x, y)dy\right] dx$

e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy\right] dx$ f) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_y^{y+3} f(x, y)dx\right] dy$

8. Cacule o volume do conjunto dado

a) $x^2 + y^2 \leq 1$ e $x + y + 2 \leq z \leq 4$.

b) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$ e $0 \leq z \leq x^2 + y^2$

c) $0 \leq y \leq 1 - x^2$ e $0 \leq z \leq 1 - x^2$

d) $x^2 + y^2 + 3 \leq z \leq 4$

e) $x^2 + 4y^2 \leq 4$ e $x + y \leq z \leq x + y + 1$

Mudança de variável: coordenadas polares

9. Calcule

a) $\displaystyle\int\int_B (x^2 + 2y)dxdy$ onde B é o circulo $x^2 + y^2 \leq 4$

b) $\displaystyle\int\int_B (x^2+y^2)dxdy$ onde $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/1\leq x^2+y^2\leq 4\}$

c) $\displaystyle\int\int_B x^2dxdy$ onde B é o conjunto $4x^2+y^2\leq 1$

d) $\displaystyle\int\int_B \sin(4x^2+y^2)dxdy$ onde B é o conjunto de todos os (x,y) tais que $4x^2+y^2\leq 1$ e $y\geq 0$.

e) $\displaystyle\int\int_B e^{x^2+y^2}dxdy$ onde B é o conjunto de todos os (x,y) tais que $1\leq x^2+y^2\leq 4$

f) $\displaystyle\int\int_B xdxdy$ onde B é o circulo $x^2+y^2-x\leq 0$

g) $\displaystyle\int\int_B y^2dxdy$ onde $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\leq 1,\, y\geq x,\, x\geq 0\}$

h) $\displaystyle\int\int_B xydxdy$ onde B é o circulo $x^2+y^2-2y\leq 0$, $x\geq 0$.

Integrais de Linha de um campo vetorial

10. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$ sendo, dados

a) $\vec{F}(x,y)=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$ e $\gamma(t)=(\cos t, sen\, t)$, $0\leq t\leq 2\pi$.

b) $\vec{F}(x,y)=(x+y)\,\vec{k}$ e $\gamma(t)=(t,1-t^2)$, $0\leq t\leq 1$

c) $\vec{F}(x,y)=x^2\,j$ e $\gamma(t)=(t^2,3)$, $-1\leq t\leq 1$.

d) $\vec{F}(x,y)=x^2\,\vec{i}+(x-y)\,\vec{j}$ e $\gamma(t)=(t, sen\, t)$, $0\leq t\leq \pi$.

e) $\vec{F}(x,y)=x^2\,\vec{i}+y^2\,\vec{j}$ e $\gamma(t)=(2\cos t, 3sen\, t)$, $0\leq t\leq 2\pi$.

11. Calcule:

a) $\displaystyle\int_\gamma x\,dx+y\,dy$, sendo γ dada por $x=t^2$ e $y=sen\, t$, $0\leq t\leq \pi/2$.

b) $\displaystyle\int_\gamma x\,dx-y\,dy$, onde γ é o segmento de extremidades $(1,1)$ e $(2,3)$, percorrido no sentido de $(1,1)$ para $(2,3)$.

c) $\displaystyle\int_\gamma 2\,dx-dy$, onde γ tem por imagem $x^2+y^2=4$, $x\geq 0$ e $y\geq 0$, o sentido de percurso é de $(2,0)$ para $(0,2)$.

d) $\displaystyle\int_\gamma xe^x\,dx-(x+2y)\,dy$, onde γ é a parabola $y=x^2$ percorrida de $(0,0)$ a $(1,1)$.

e) $\displaystyle\int_\gamma x\,dx - xy\,dy$, onde $\gamma(t) = (t, |t|)$, $-1 \leq t \leq 1$

f) $\displaystyle\int_\gamma x\,dx + y\,dy$, onde γ é uma curva cuja a imagem é a poligonal de vertíces $(0,0)$, $(2,0)$ e $(2,1)$, orientada de $(0,0)$ para $(2,1)$.

Campos Conservativos

12. Verifique que o campo vetorial $\vec{F}$ é conservativo e encontre uma função potencial para $\vec{F}$ onde:

a) $\vec{F}(x,y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

b) $\vec{F}(x,y) = 2xy\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$

c) $\vec{F}(x,y) = 2xe^{x^2+y^2}\,\vec{i} + 2ye^{x^2+y^2}\,\vec{j}$

d) $\vec{F}(x,y) = y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$

e) $\vec{F}(x,y) = (3x^2y^2 + 2)\,\vec{i} + 2x^3y\,\vec{j}$

13. O campo $\vec{F}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{j}$ é conservativo. Encontre uma função potencial para $\vec{F}$.

14. O campo $\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{j}$ não é conservativo. Calcule o rotacional de $\vec{F}$.

15. Verifique que o campo vetorial $\vec{F}$ não é conservativo onde :

a) $\vec{F}(x,y) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$

b) $\vec{F}(x,y) = x^3y^2\,\vec{i} + x^2y\,\vec{j}$

c) $\vec{F}(x,y) = x^3y^2\,\vec{i} + x^2y\,\vec{j}$

d) $\vec{F}(x,y) = (x-y)\,\vec{i} + x^2y^2\,\vec{j}$

16. Calcule

a) $\displaystyle\int_\gamma x\,dx + e^{y^2}\,dy$ onde $\gamma(t) = (2\cos t, sen\,t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy$, onde $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ com $\gamma(0) = (1,0)$ e $\gamma(1) = (0,1)$.

c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$, onde $\gamma(t) = (\cos t, sen\,t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

d) $\displaystyle\int_\gamma 2xy\,dx + x^2\,dy$, onde $\gamma(t) = (t, t^2)$, $1 \leq t \leq 2$.

e) $\displaystyle\int_\gamma 2xe^{x^2+y^2}\,dx + 2ye^{x^2+y^2}\,dy$, onde $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 3$.

f) $\displaystyle\int_\gamma (3x^2y^2 + 2)\,dx + 2x^3y\,dy$, onde $\gamma(t) = (\cos t, 2sen\,t)$ e $0 \leq t \leq \pi$.

Teorema de Green

17. Comprove o Teorema de Green, isto é, verifique que

$$\int_{\partial K} Pdx + Qdy = \int\int_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

onde

a) $\vec{F}(x,y) = (2xy - x^2, x + y^2)$ e K o domínio limitado entre as curvas $y = x^2$ e $y = x$.

b) $\vec{F}(x,y) = (xy, -2xy)$ e K o retângulo $[1,2] \times [0,3]$.

18. Use o teorema de Green para calcular as seguintes integrais de linha:

a) $\displaystyle\int_\gamma x^2\,dx + (4x+y)\,dy$, onde γ é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,2)$, e $(2,0)$, no sentido anti-horário.

b) $\displaystyle\int_\gamma (\ln x - 2y)\,dx + (2x + e^y)\,dy$, onde γ é a elípse $x^2 + y^2/9 = 1$, no sentido anti-horário.

c) $\displaystyle\int_\gamma (y^2 + \sqrt{4 - x^2})\,dx + (\ln y - 4x)\,dy$, onde γ é o retângulo de vértices $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,2)$ e $(0,2)$ no sentido anti-horário.

d) $\displaystyle\int_\gamma e^x\,dx + (e^y+1)\,dy$, onde γ é o triângulo de vértices $(-1,2)$, $(-3,1)$ e $(1,0)$, no sentido anti-horário.

10. Seja K um compacto com fronteira ∂K orientada no sentido anti-horário. Se $A(K)$ é a área de K, use o teorema de Green para mostrar :

a) $\displaystyle A(K) = \int_{\partial K} x\,dy$

b) $\displaystyle A(K) = \int_{\partial K} -y\,dx$

c) $\displaystyle A(K) = \frac{1}{2}\int_{\partial K} -y\,dx + x\,dy$

19. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy$ e $\displaystyle\int_\gamma \frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{-x}{x^2+y^2}\,dy$ onde γ é o arco de parábola $y = x^2 - 1$, $-1 \leq x \leq 2$ seguido pelo segmento de $(2,3)$ a $(-1,0)$. (Sugestão: Aplique o teorema de Green a uma região que não contenha a origem)