

IME-USP
Segundo Semestre de 2020
Medida e Integração
Lista de Teoremas De Convergencia

1. Teorema da Convergência Dominada:

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, e $f_n : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis que converge para uma função f , e $g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável com $|f_n(x)| \leq g(x) \forall x \in E, E \in \mathcal{A}$.
Então $\int_E f_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu$, e $\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$.

2. Corolário: Se $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções tais que $\exists \int_X f_n d\mu$. Então se $\sum_1^\infty \int_X |f_n(x)| d\mu < +\infty$ temos que $\sum_1^\infty \int_X f_n d\mu = \int_X \sum_1^\infty f_n d\mu$. Observe que neste Corolário o resultado é o mesmo que no Corolário acima, mas f_n não precisa ser ≥ 0 .

3. A seguir damos dois resultados sobre o que acontece quando as $\int_X f_n(x) d\mu < M, M \in \mathbb{R}, f_n \geq 0$

4. Teorema (Beppo Levi):

Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra e $f_n : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$ uma sequência não decrescente de funções mensuráveis não negativas, $E \in \mathcal{A}$. Suponha que $\int_E f_n d\mu \leq M, M \in \mathbb{R}$
Então $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ e é finito em qtp, f é integrável em E e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$

5. Teorema (Fatou): seja $f_n : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$ uma sequência de funções mensuráveis não negativas com $\int_E f_n d\mu \leq M, M \in \mathbb{R}$. Suponha que f_n converge qtp para f . Então $\int_E f d\mu \leq M$.

6. Continuidade dependente de um parâmetro: Seja $f(x, t) : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- (a) $\forall t \in [a, b]$, a função $f(, t)$ é mensurável.
- (b) para quase todo $x \in X$, a função $f(x,)$ é contínua em $[a, b]$.
- (c) $\exists g \in L^1 \nearrow |f(x, t)| \leq |g(x)|$
Então: a função $\beta(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$ é contínua em $[a, b]$.

7. Derivabilidade dependente de um parâmetro:

Seja $f(x, t)$ como acima e suponha que para $t \in [a, b]$ temos:

- (a) $\exists \int_X f(x, t) d\mu(x)$
- (b) $\exists \frac{\partial f}{\partial t}$ em $X \times [a, b]$
- (c) $\exists$ uma função h integrável em X com $\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right| \leq h(x)$.
Então $\beta(t)$ do exercício anterior é derivável em $[a, b]$ e

$$\beta'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t} d\mu(x) = \frac{d \int_X f(x, t) d\mu(x)}{dt}$$

Exercícios Notação: Indicaremos $\int_{[a,b]} f d\mu$ para a Integral de Lebesgue no intervalo $[a,b]$ e $\int_a^b f(x) dx$ para a Integral de Riemann.

1. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrável com $\int_a^b f(x)dx < +\infty$, então f é mensurável e sua Integral de Riemann é igual à sua Integral de Lebesgue. Ou seja $\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\mu$.
2. Seja $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que existe a integral imprópria de Riemann $\lim_{x \uparrow b} \int_a^x f dx$. Então existe a $\int_{[a,b]} f d\mu$ e é igual a integral imprópria.
3. Seja $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existem as integrais impróprias de Riemann $\lim_{x \uparrow b} \int_a^x f dx$ e $\lim_{x \uparrow b} \int_a^x |f| dx$. Então existe a $\int_{[a,b]} f d\mu$ e é igual a integral imprópria.
4. Seja $\alpha > 1$. Mostre que $\int_0^1 \frac{nt \operatorname{sen} t}{1 + (nt)^\alpha} dt \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$
5. Seja $f_n = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}$. Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty f_n dx$.
6. Mostre que $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k x^n (1 - k^{-1}x)^k dx = n!$.
7. calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n} dx$.
8. Seja $f_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k} \chi_{[k-1, k]}$ que converge para $f = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \chi_{[k-1, k]}$. Mostre que $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f_n d\mu$, mas $\nexists \int_{\mathbb{R}^+} f d\mu$ como integral de Lebesgue. Ou seja pode existir a Integral Imprópria de Riemann e não existir a Integral de Lebesgue correspondente.
9. Seja $f \in L^1$. A Transformada de Fourier de f é dada por $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i t x} dx$. Mostre que $\varphi(t)$ é contínua $\forall t$. A seguir calcule $\varphi'(t)$, mostrando antes que ela existe. (Entre outros temas, ela é utilizada para resolver EDP).
10. Seja $f \in L^1$. A Transformada de Laplace de f é dada por $\psi(s) = \int_{\mathbb{R}^+} f(x) e^{-sx} dx$. Mostre que $\psi(s)$ é contínua $\forall s$. A seguir calcule $\varphi'(s)$ mostrando antes que ela existe. (A Transformada de Laplace define-se análogamente para $s \in \mathbb{C}$. Entre outros temas, ela é utilizada para resolver EDO).
11. Mostre que a função dada por $\varphi(t) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1 + x^4} dx$ está bem definida e é contínua. A seguir calcule $\varphi'(t)$ e mostre que é contínua.
12. Mostre que $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$ derivando a equação $\int_0^{+\infty} e^{-tx} dx = \frac{1}{t}$; para $t > 0$.
13. Mostre que a $\int_0^1 \frac{1}{t} \operatorname{sen}(\frac{1}{t}) dt$ existe como integral imprópria de Riemann, mas não como integral de Lebesgue.

14. Seja $f_n = n\chi_{\left[0, \frac{1}{n}\right]}$ em $X=[0,1]$ e $\mathcal{A}$ σ álgebra de Lebesgue. Mostre que a condição $|f_n| \leq g$ não pode ser descartada no Teorema da Convergência Dominada.
15. Seja $f_n \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$ uma sequência que converge uniformemente a uma função f e $\mu(X) < \infty$. Então $\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$
16. Mostre que a hipótese $\mu(X) < +\infty$ não pode ser descartada no exercício anterior. Com efeito, seja $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$. A sequência converge para $f=0$ uniformemente, mas $\int_{[0,+\infty]} f_n d\mu = 1$ e $\int_{[0,+\infty]} d\mu = 0$
17. $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty]}$, e $f = 0$ com a álgebra dos Borelianos. A sequência é decrescente e converge uniformemente para f , mas $0 = \int f d\mu \neq \lim \int f_n d\mu = +\infty$. Ou seja que não há um Teorema da Convergência Monótona para $f_n \geq 0$ decrescente.
18. Seja f_n uma sequência decrescente que e suponhamos que $\int f_1 < +\infty$. O que acontece? A sequência converge? para uma função integrável?
Solução: considere a sequência $g_n = f_1 - f_n$.
19. No Lema de Fatou temos desigualdades envolvendo $\liminf$. Mostre que se a sequência f_n for dominada por g , obtemos uma desigualdade envolvendo o $\limsup$.
20. Seja $f_{2n} = \chi_E$; $f_{2n+1} = 1 - \chi_E$ onde $0 < \mu(E) < +\infty$. Para esta sequência, a desigualdade do Lema de Fatou é estrita.
21. Enuncie um Teorema da Convergência Dominada para o espaço l_1 das sequências numéricas (a_k) , $k \in \mathbb{N}$ sendo μ a medida de contagem, ou seja $\mu(k) = 1, \forall k \in \mathbb{N}$.