

FÍSICA IV

# ÓTICA GEOMÉTRICA

A propagação da luz atrai o interesse da humanidade desde a antiguidade mais remota. Em particular, a *refração* dos raios luminosos ao passar do ar para água, isto é, a súbita mudança de direção na superfície do líquido sempre despertou curiosidade. A descrição matemática da refração já era conhecida, na Arábia, na Idade Média. Na Europa, a lei da refração foi redescoberta por mais de um estudioso, na primeira metade do Século XVII, e acabou associada ao nome de um deles, o astrônomo holandês Willerbrod Snell.

Em 1676, outro astrônomo, o dinamarquês Ole Rømer, fez uma descoberta ainda mais importante. Na época, prevalecia a noção de que a luz tinha velocidade infinita, defendida por Descartes e outros filósofos. Rømer mediu sistematicamente o período  $T$  da órbita dos satélites de Júpiter. As medidas mostraram que o período dependia da estação do ano aqui na Terra. Uma mente mais conformada com o pensamento da época poderia concluir que a Terra era o centro do universo, a ponto de influenciar o movimento de corpos celestes a um bilhão de quilômetros de nós.

O astrônomo, felizmente, não se deixou enganar. Ele concluiu que as variações de  $T$  comprovavam que a luz viajava a velocidade finita. Mais especificamente, mostravam que a luz leva um tempo  $\Delta t$  comparável com o período  $T$  para vir do planeta gigante até aqui.

Na época do ano em que a Terra se aproximava de Júpiter, o tempo de trânsito  $\Delta t$  se tornava mais curto enquanto a medida era feita, e o período  $T$  parecia menor. Na época em que a Terra se afastava de Júpiter, o tempo de trânsito se alongava durante a medida, e o período parecia mais longo.

De posse dessa informação, quinze anos depois, em 1690, o físico holandês Christiaan Huygens publicou uma teoria ondulatória para a propagação da radiação luminosa. Logo no início o seu livro descreve o trabalho de Rømer. Em 1704, Newton publicou uma teoria alternativa, que descrevia a luz como um feixe de partículas.

Tanto Huygens como Newton estavam interessados no comportamento da luz em situações do cotidiano deles. O que acontecia quando a luz incidia num espelho ou passava de um meio transparente para outro, por exemplo. Nessas condições, tanto o modelo ondulatório como o de partículas são adequados, porque o comprimento de onda da luz visível,  $\lambda < 1 \times 10^{-6}$  m, é muito menor do que o tamanho dos objetos de interesse. Esse regime é conhecido como *ótica geométrica*, porque a luz segue uma trajetória, que pode ser encontrada por construção geométrica. Aqui, porém, adotaremos um procedimento alternativo.

## O princípio de Fermat

Mesmo antes do trabalho de Rømer, alguns cientistas argumentavam que a luz tinha velocidade finita. Em 1662, o matemático francês Pierre de Fermat propôs o *princípio do menor tempo* para derivar a lei da refração.<sup>1</sup> O princípio de Fermat determina a trajetória que os raios de luz entre um ponto de partida e outro, de chegada.

A figura 1 mostra uma ilustração. Para ir do ponto  $A$  ao ponto  $B$ , a luz teria, em princípio, uma infinidade de caminhos a sua disposição. Entre estes, ela segue o trajeto que minimiza o tempo de percurso.

As seções abaixo determinam a trajetória dos raios de luz em diversas situações, com base no princípio de Fermat.

### A lei da refração

Quando a luz viaja sempre no vácuo, como na figura 1, a sua velocidade é sempre a mesma, e minimizar o tempo equivale a escolher a trajetória que minimiza a distância. Se não houver nenhum impedimento, a trajetória será retilínea.

Se o raio de luz passar do vácuo para um material transparente, a trajetória deixa de ser retilínea. O desvio provoca ilusões, que todos conhecem. Uma piscina, por exemplo, parece mais rasa do que realmente é. Uma barra inserida na água parece ficar dobrada no ponto de imersão. Esse comportamento se deve à mudança da velocidade da luz, que se move mais devagar nos dielétricos do que no vácuo. Graças à mudança de velocidade, os raios de luz tendem a mudar de direção ao passar do vácuo para um material transparente. Isso pode ser demonstrado de várias maneiras, mas o princípio do tempo mínimo oferece uma prova especialmente simples.

A figura 2 descreve a geometria. Um ponto  $A$ , que será a fonte de luz, está no vácuo. Um ponto  $B$  está imerso num material transparente, representado pelo retângulo amarelo. A velocidade da luz nesse material é  $c/n$ ; dizemos que o *índice de refração* do material é  $n$  e que o material é *oticamente mais denso* do que o vácuo. A superfície do material transparente entre os pontos  $A$  e  $B$  é um plano horizontal. O ponto  $A$  está a uma distância  $a$  da acima desse plano, e o ponto  $B$ , a uma distância  $b$  abaixo dele. A separação horizontal entre os pontos  $A$  e  $B$  é  $d$ .

Um raio de luz é emitido no ponto  $A$  e alcança o ponto  $B$ . Nosso desafio é encontrar o ponto  $M$ , onde o raio cruza a superfície do material transparente.

<sup>1</sup> Fermat não demonstrou matematicamente o princípio, mas mostrou que ele permite derivar a lei da refração observada experimentalmente; para isso, basta admitir que a luz viaja mais rápido no ar do que nos meios mais densos, como veremos na seção A lei da refração.

Para demonstrar o princípio de Fermat, é necessário supor que (1) a luz é uma onda e (2) que o comprimento de onda é muito menor do que os tamanhos de qualquer obstáculo que a luz possa encontrar. Dadas essas duas hipóteses, mostra-se que o tempo de percurso entre um ponto  $A$  e  $B$  é um extremo, ou seja, que o tempo de percurso não varia quando se muda infinitesimalmente a trajetória. O tempo ser mínimo é um caso particular; poderia ser máximo ou um ponto de inflexão.

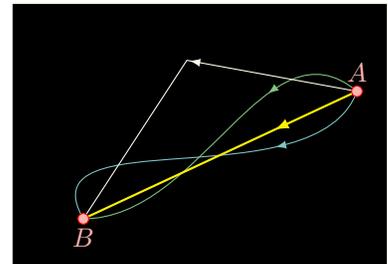


Figura 1: O princípio de Fermat. Dados dois pontos  $A$  e  $B$ , dentre todos os caminhos que os ligam, a luz segue aquele que minimiza o tempo de trânsito, isto é, o segmento de reta amarelo.

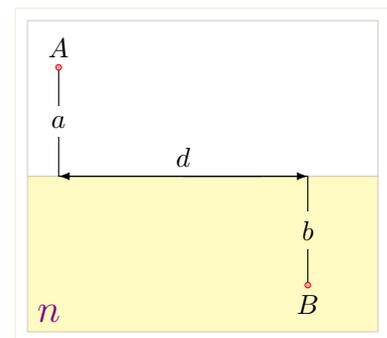


Figura 2: Geometria que define a lei de refração. A região branca, onde está o ponto  $A$ , é vazia. Na região amarela, que abriga o ponto  $B$ , existe um material transparente com índice de refração  $n$ .

Para indicar a posição do ponto  $M$ , chamamos de  $x$  a distância horizontal entre ele e o ponto  $A$ . A distância horizontal entre  $M$  e  $B$  é  $d - x$ .

Mesmo fisicamente, o princípio de Fermat explica por que existe refração. Se a velocidade da luz fosse igual nos dois meios, a trajetória entre  $A$  e  $B$  seria retilínea, e a luz gastaria um tempo proporcional à altura  $a$  na região branca da figura 1 e um tempo proporcional a  $b$  na região amarela. Uma vez que a luz avança mais rápido na região branca do que na amarela, é vantagem andar mais na primeira região e menos na segunda. Significa que a luz deixa a trajetória retilínea para incidir na superfície do material amarelo num ponto mais próximo de  $B$ , como na figura 2.

Para aplicar matematicamente o princípio de Fermat, precisamos calcular o tempo que o raio gasta para ir de  $A$  a  $B$  em função da distância  $x$ . Dividimos o percurso em duas partes: a primeira de  $A$  até  $M$  e a segunda de  $M$  até  $B$ . O tempo para percorrer o primeiro trecho é

$$\Delta t_{AM} = \frac{d_{AM}}{c}, \quad (1)$$

onde  $d_{AM}$  é a distância de  $A$  até  $M$ .

A figura 2 mostra que a distância  $d_{AM}$  é a hipotenusa do triângulo retângulo com vértice no ponto  $A$ , que tem catetos  $a$  e  $x$ . Assim, vemos que

$$d_{AM} = \sqrt{a^2 + x^2}. \quad (2)$$

Dentro do material, a velocidade é  $c/n$ . O tempo de percurso entre os pontos  $M$  e  $B$  é, portanto,

$$\Delta t_{MB} = \frac{nd_{MB}}{c}. \quad (3)$$

A distância  $d_{MB}$  entre os dois pontos é também dada pelo teorema de Pitágoras, pois  $d_{MB}$  é a hipotenusa do triângulo retângulo com catetos  $b$  e  $d - x$ :

$$d_{MB} = \sqrt{b^2 + (d - x)^2}. \quad (4)$$

Podemos agora juntar as Eqs. (1)-(4) para calcular o tempo de percurso:

$$\Delta t \equiv \Delta t_{MA} + \Delta t_{MB} = \frac{1}{c} \left( \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2} \right). \quad (5)$$

Para encontrar a posição que minimiza o tempo, precisamos impor que  $d\Delta t/dx = 0$ . O cálculo da derivada da função no lado direito da

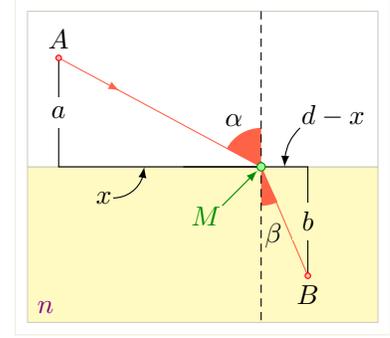


Figura 3: Trajetória de raio de luz que sofre refração. Na geometria da figura 1, o raio parte do ponto  $A$ , avança uma distância horizontal  $x$  até alcançar a superfície do meio transparente no ponto  $M$  e dali prossegue até o ponto  $B$ . O ângulo  $\alpha$  entre a direção do raio no vácuo e a normal à superfície é chamado de *ângulo de incidência*, e o ângulo  $\beta$  entre a direção do raio no material e a normal à superfície é chamado de *ângulo de refração*.

Eq. (5) mostra que

$$\frac{d\Delta t}{dx} = \frac{1}{c} \left( \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{n(d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \right). \quad (6)$$

Igualamos, agora, o lado direito da Eq. (6) a zero para encontrar que

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{n(d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}. \quad (7)$$

No triângulo retângulo com vértice em  $A$  na figura 2, a razão  $x/\sqrt{a^2 + x^2}$  é a razão entre o cateto adjacente ao vértice  $M$  e a hipotenusa, isto é, igual ao cosseno do ângulo entre o cateto e a hipotenusa. Esse ângulo é igual a  $\pi/2 - \alpha$ , onde  $\alpha$  é o ângulo de incidência definido na figura 2. Assim, temos que

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \text{sen } \alpha. \quad (8)$$

Analogamente, podemos ver que

$$\frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = \text{sen } \beta, \quad (9)$$

onde  $\beta$  é o ângulo de refração, também definido na figura.

A Eq. (7), portanto, equivale à relação

$$\text{sen } \alpha = n \text{sen } \beta, \quad (10)$$

que expressa a lei da refração, ou lei de Snell. De maneira mais geral, quando um raio de luz passa de um meio com índice de refração  $n_A$  para outro com índice  $n_B$ , a lei de Snell assume a forma

$$n_A \text{sen } \alpha = n_B \text{sen } \beta. \quad (11)$$

O ângulo de refração é menor do que o de incidência quando a luz passa de um meio opticamente menos denso (ar, por exemplo) para outro mais denso (água, por exemplo).

### Espelho plano.

Muitos materiais refletem a luz. Na situação da figura 2, por exemplo, parte do raio incidente é refletida de volta para a região branca. Discutiremos mais tarde essa reflexão, mas é mais instrutivo, aqui, focalizar a atenção no comportamento de um raio de luz que incide sobre um espelho, como na figura 4.

O raio de luz parte do ponto  $A$  e alcança o ponto  $B$ . Queremos determinar o ponto em que ele incide sobre o espelho. Uma análise algébrica semelhante à da Seção *A lei da refração* determinaria a posição

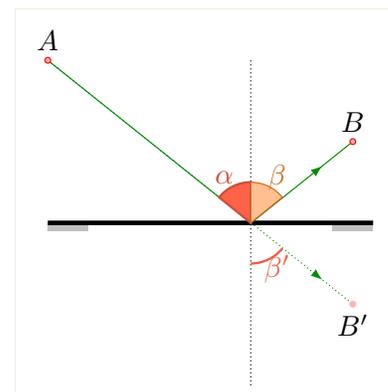


Figura 4: Reflexão em um espelho.

do ponto de incidência. Há, porém, uma maneira mais simples de se aplicar o princípio de Fermat.

Dado o ponto  $B$ , podemos definir o ponto  $B'$  que, como mostra a figura, é o simétrico de  $B$  em relação ao espelho. Em outras palavras, o segmento de reta que une  $B'$  a  $B$  é vertical, e seu ponto médio está exatamente na superfície do espelho. Graças a essa construção qualquer ponto sobre o espelho é equidistante de  $B$  e de  $B'$ .

Assim, o tempo que a luz leva para ir de  $A$  a um ponto no espelho e depois para  $B$  é exatamente igual ao tempo que ela levaria para alcançar o mesmo ponto no espelho e depois ir até  $B'$ , se pudesse atravessar o espelho. Em outras palavras, determinar o ponto de incidência sobre o espelho que minimiza o tempo que a luz leva para ir de  $A$  a  $B$  equivale a encontrar o ponto sobre o espelho que minimizaria o tempo que um hipotético raio de luz levaria para chegar ao ponto  $B'$ , se conseguisse atravessar o espelho.

Se a luz pudesse atravessar o espelho, o caminho mais rápido de  $A$  para  $B'$  seria o segmento de reta  $AB'$ , desenhado na figura 4. O ponto onde esse segmento cruza o espelho é o ponto onde o raio será refletido para chegar a  $B$ . O princípio de Fermat explica, dessa forma, por que olhar para um espelho plano produz a ilusão de que estamos vendo um mundo simétrico ao nosso. Uma pessoa canhota que acena com a mão esquerda frente a um espelho tem a impressão de ter a sua frente uma cópia dextra de si mesma.

A figura 4 também põe em evidência uma importante propriedade da reflexão por espelhos: o *ângulo de incidência*  $\alpha$ , entre o raio incidente e a normal à superfície, é igual ao *ângulo de reflexão*  $\beta$ , entre o raio refletido e a mesma normal. Para demonstrar que os ângulos são iguais, notamos que os ângulos  $\alpha$  e  $\beta'$  são iguais, porque são opostos pelo vértice. Por outro lado,  $\beta'$  é o simétrico de  $\beta$ , e assim  $\beta = \beta'$ . Segue que  $\beta = \alpha$ , como queríamos demonstrar.

A figura 5 mostra o ponto  $A'$ , simétrico de  $A$  atrás do espelho.  $A'$  é a *imagem virtual* de  $A$ . Vejamos o que isso significa. A parte acima do espelho é simétrica em relação à que está abaixo. Por exemplo, os ângulos  $\alpha'$  e  $\alpha$  são iguais. Se houver uma observadora no ponto  $B$ , ela verá o raio de luz refletido pelo espelho e terá a impressão de que ele provém do ponto  $A'$ .

Se a observadora se deslocar, para a direita ou para a esquerda, ainda verá um raio de luz que parecerá provir de  $A'$ . Há, portanto, uma imagem no ponto  $A'$ . A imagem é dita virtual porque a luz parece divergir dela.

As imagens formadas por espelhos planos são virtuais, mas quando a superfície refletora é curva, outro tipo de imagem pode ser formada, como veremos a seguir.

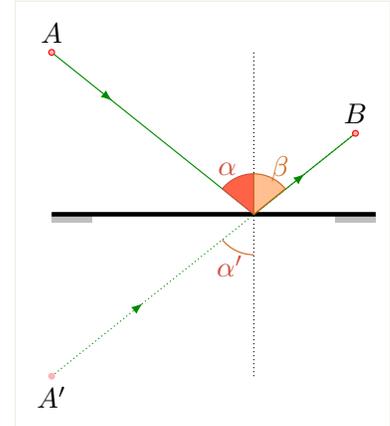


Figura 5: Imagem virtual. Para um observador em  $B$ , o raio de luz refletido parece provir de uma fonte de luz em  $A'$ .

### Espelho esférico

A figura 4 mostra um *espelho esférico côncavo*, com raio  $R$ . O espelho é constituído por uma calota esférica cuja superfície interna é refletora. O raio  $R$  da calota deve ser muito maior do que o seu diâmetro. O eixo de simetria da calota é chamado de *eixo ótico*

Estamos interessados no comportamento da luz emitida por uma fonte sobre o eixo ótico. Na figura, a fonte de luz se encontra no ponto  $A$ . Queremos conhecer as condições necessárias para que a luz chegue a outro ponto,  $B$ . Um raio de luz que saia de  $A$  e passe pelo centro de curvatura  $O$  da calota esférica atingirá o espelho perpendicularmente à superfície e será refletido de volta em direção a  $A$ . Esperamos, por isso, que o ponto  $B$  também esteja sobre o eixo ótico do espelho, como mostra a figura.

Podemos, assim, definir as posições dos pontos  $A$  e  $B$  como distâncias a que ele estão do espelho, medidas ao longo desse eixo. Como mostra a figura 7, a posição da fonte  $A$  é denotada  $p$ , e a da imagem  $B$  é denotada  $q$ .

Definidas essas coordenadas, voltamos nossa atenção para o princípio de Fermat. Vamos acompanhar a trajetória de um raio de luz que parte de  $A$ , atinge o espelho num ponto qualquer e é refletido para o ponto  $B$ . A figura 7 mostra, esquematicamente, a trajetória.

Como toda a trajetória está no mesmo meio — ar, por exemplo —, a velocidade da luz é a mesma nos dois trechos do trajeto. O tempo de trânsito  $\Delta t$  é proporcional à soma da distância  $d_A$ , do ponto  $A$  ao ponto de reflexão  $M$ , com a distância  $d_B$  entre  $B$  e  $M$ . Minimizar  $\Delta t$  equivale a minimizar o comprimento  $\ell \equiv d_A + d_B$ .

As distâncias  $d_A$  e  $d_B$  dependem o ângulo  $MOC$ , entre os raios  $OM$  e  $OC$  na figura 9. Chamaremos esse ângulo de  $\theta$  e, com ajuda dele, faremos duas triangulações. Os dois triângulos que nos interessam foram pintados de verde na figura 10.

Como a álgebra é a mesma, nos dois triângulos, podemos concentrar nossa atenção no triângulo realçado no painel superior da figura 10, que é reproduzido com mais detalhe na figura 11.

**A lei dos cossenos**

A lei dos cossenos é uma generalização do teorema de Pitágoras. Ela relaciona o lado de um triângulos com os outros dois lados e o ângulo oposto.

Num triângulo qualquer, como o da seguinte figura,

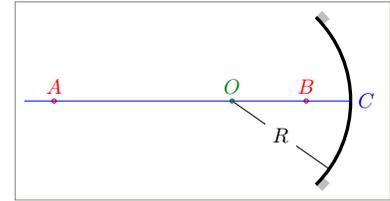


Figura 6: Espelho côncavo. A superfície refletora tem a forma de calota esférica. Para maior clareza, o desenho mostra um espelho com diâmetro exageradamente grande. Na prática, o diâmetro da calota é muito menor do que seu raio, de modo a tornar pequeno o ângulo de abertura do espelho. A linha azul, que começa no ponto central  $C$  da superfície e passa pelo seu centro de rotação  $O$  é o eixo ótico do espelho.

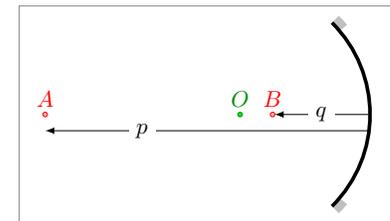


Figura 7: Posições da fonte de luz e da imagem. As posições são medidas ao longo do eixo que passa por  $A$  e pelo centro de curvatura  $O$  do espelho, a partir do ponto onde o eixo encontra o espelho.

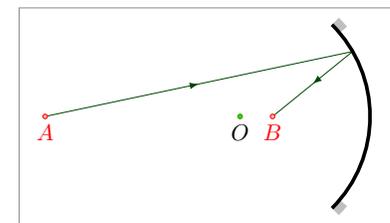


Figura 8: Trajetória de um raio de luz que parte do ponto  $A$  e se dirige ao ponto  $B$ , após ser refletido em um ponto arbitrário na superfície do espelho.

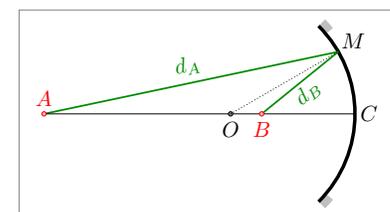
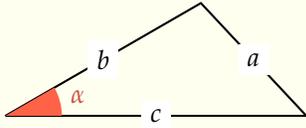


Figura 9: Distâncias percorridas pelo raio de luz no trajeto entre  $A$  e  $B$ .



a lei dos cossenos nos diz que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Se o ângulo for reto, o último termo à direita se anula e resulta Pitágoras. A demonstração é um exercício simples de geometria analítica: considere três vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ , alinhados com os lados do triângulo na figura, de forma que

$$\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}.$$

O produto escalar de cada lado da equação consigo mesmo nos diz que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c},$$

resultado que equivale à lei dos cossenos.

Como podemos ver da figura, o lado maior do triângulo é  $d_A$ . Os outros dois lados são  $R$  (distância  $OM$ ) e  $p - R$  (distância  $AO$ ). A lei dos cossenos mostra que  $d_A$ :

$$d_A^2 = R^2 + (p - R)^2 - 2R(p - R) \cos(\pi - \theta), \quad (12)$$

ou seja

$$d_A^2 = R^2 + (p - R)^2 + 2R(p - R) \cos(\theta). \quad (13)$$

O mesmo procedimento aplicado ao triângulo no painel inferior da figura 10 conduz a um resultado análogo para a distância entre  $M$  e  $B$ :

$$d_B^2 = R^2 + (q - R)^2 + 2R(q - R) \cos(\theta). \quad (14)$$

Assim como expressamos as distâncias percorridas pela luz em função do parâmetro  $x$  nas Eqs. (2) e (4), expressamos aqui as distâncias percorridas pela radiação em função do parâmetro  $\theta$ . Estamos prontos para minimizar o tempo de percurso, que, aqui, é proporcional à distância percorrida. Assim como no cálculo da seção , a minimização deve identificar o ângulo  $\theta$  que define a trajetória luminosa. Fisicamente, poderíamos esperar que esse ângulo seja  $\theta = 0$ . Entretanto, como veremos a seguir, a geometria do espelho côncavo abre espaço para uma solução alternativa, e esta é bem mais interessante.

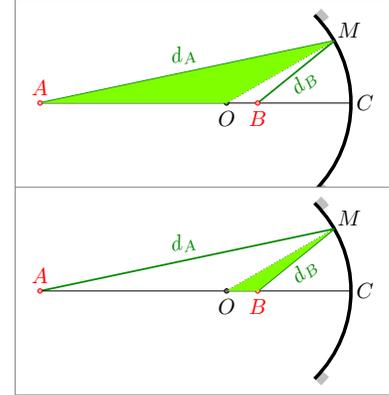


Figura 10: Triângulos que determinam as distâncias  $d_A$  (painel superior) e  $d_B$  (painel inferior) percorridas pelo raio de luz.

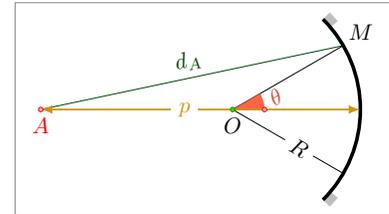


Figura 11: Distância percorrida pela luz entre a fonte  $A$  e o espelho. A distância  $d_A$  é o tamanho do lado maior do triângulo  $AMO$ , oposto ao ângulo obtuso  $\pi - \theta$ .

Para minimizar o tempo de percurso, devemos impor a condição  $d(d_A + d_B)/d\theta = 0$ . Para calcular a derivada de  $d_A$ , o mais simples é derivar os dois lados da Eq. (13) em relação a  $\theta$ . Resulta que

$$\frac{dd_A}{d\theta} = -\frac{R(p-R)\text{sen}(\theta)}{d_A}. \quad (15)$$

O ângulo  $\theta$  é menor do que o ângulo de abertura do espelho, que é pequeno. Para  $\theta \ll 1$ ,  $\cos\theta$  é aproximadamente igual à unidade, e a Eq. (13) se reduz a

$$d_A^2 = R^2 + (p-R)^2 + 2R(p-R) \quad (\theta \ll 1). \quad (16)$$

O lado direito da Eq. (16) é o quadrado perfeito que resulta da expansão de  $[R + (p-R)]^2$ . Concluimos, assim, que  $d_A \approx p$  (para  $\theta \ll 1$ ) e podemos reescrever a Eq. (15) na forma

$$\frac{dd_A}{d\theta} = -\frac{R(p-R)}{p}\text{sen}(\theta). \quad (17)$$

Da mesma maneira, obtemos a seguinte expressão para a distância  $d_B$ :

$$\frac{dd_B}{d\theta} = -\frac{R(q-R)}{p}\text{sen}(\theta). \quad (18)$$

Somadas as Eqs. (17) e (18), resulta que

$$\frac{d(d_A + d_B)}{d\theta} = -R\left(\frac{p-R}{p} + \frac{q-R}{q}\right)\text{sen}(\theta). \quad (19)$$

A condição de minimização  $d(d_A + d_B)/d\theta = 0$  equivale, portanto, à igualdade

$$\left(\frac{p-R}{p} + \frac{q-R}{q}\right)\text{sen}(\theta) = 0, \quad (20)$$

depois de eliminado o fator  $-\text{sen}(\theta)$  do lado direito da Eq. (19).

Vemos assim que, como esperávamos, a condição que minimiza o tempo admite a solução  $\theta = 0$ . Existe, porém, uma segunda solução, mais interessante porque vale para qualquer ângulo  $\theta$ . Essa solução prevalece quando o fator que multiplica  $\text{sen}\theta$  no lado esquerdo da Eq. (20) é igual a zero, ou seja, quando

$$\frac{p-R}{p} + \frac{q-R}{q} = 0. \quad (21)$$

A Eq. (21) pode ser simplificada. A primeira fração à esquerda é igual a  $1 - R/p$  e a segunda, a  $1 - R/q$ . Se dividirmos os dois lados por  $R$  chegaremos ao resultado

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}. \quad (22)$$

Dada a posição  $p$  da fonte, a Eq. (22) determina a posição  $q$  da imagem. Para calcular  $q$ , convém reescrever a igualdade na forma equivalente

$$q = \frac{pR}{2p - R}. \quad (23)$$

Vale a pena reconhecer o significado físico da Eq. (22). Como vimos, ela é a condição que minimiza o tempo de trânsito da luz entre os pontos  $A$  e  $B$ , seja qual for o ângulo  $\theta$  na figura 11. Significa que todo raio de luz emitido pela fonte em  $A$  (na posição  $p$ ) que alcançar o espelho côncavo será refletido para o ponto  $B$  (na posição  $q$ ). Em outras palavras, o espelho focaliza no ponto  $B$  toda a luz que recebe de  $A$ . O ponto  $B$  é chamado de *imagem real* da fonte de luz, porque a luz converge para ele.

Fisicamente, a convergência significa que a imagem real pode ser projetada sobre um anteparo. Na figura 7, por exemplo, se uma folha de papel paralela ao espelho for colocada na posição  $q$ , aparecerá um ponto luminoso sobre a folha.

A capacidade de concentrar luz é uma notável propriedade dos espelhos côncavos, que encontra aplicação nos telescópios: ela permite concentrar numa pequena área toda a luz recebida de uma região relativamente grande do céu. Para entender melhor esse poder de concentração e outras propriedades do espelho, vale a pena estudar seu comportamento para fontes de luz mais extensas e para diversos valores da posição  $p$  da fonte.

### Foco e distância focal

Começamos no limite  $p \rightarrow \infty$ , que representa uma fonte de luz muito mais distante do que o raio  $R$  do espelho. Um bom exemplo é a luz do Sol refletida por um espelho côncavo com eixo óptico dirigido para a estrela. De acordo com a Eq. (23), nesse limite a posição da imagem é  $q = R/2$ .

A figura 12 mostra como se forma a imagem. Os raios que incidem sobre o espelho vêm de tão longe que são praticamente paralelos. O ponto onde eles convergem, indicado pela letra  $F$  na figura, é conhecido como o *foco* do espelho. O foco fica sobre o eixo óptico, e é esquadristante do centro  $C$  da superfície e do centro  $O$  de rotação da calota. A separação entre o foco e o espelho é chamada de *distância focal* e denotada  $f$ . Assim,

$$f = \frac{R}{2}. \quad (24)$$

Podemos, portanto, substituir  $R$  por  $2f$  nas Eqs. (22) e (23). As duas



Figura 12: Imagem de uma fonte infinitamente distante. A imagem se forma no foco  $F$  do espelho.

se simplificam. A primeira assume a forma

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f'} \quad (25)$$

e a segunda,

$$q = \frac{pf}{p-f}. \quad (26)$$

### Fontes extensas

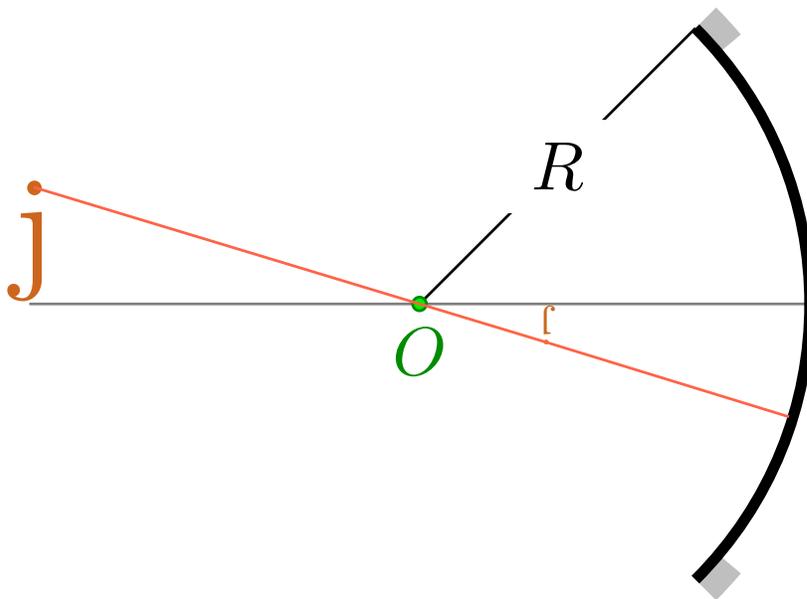


Figura 13: Imagem de fonte extensa. O segmento de reta vermelho é o eixo secundário que passa pelo pingo no topo da fonte, pelo centro  $O$  e pelo pingo na imagem.

Até aqui, discutimos o comportamento de luz emitida por uma fonte pontual. Vejamos agora o que acontece quando o tamanho da fonte é comparável com a distância  $p$ . Como ilustração, a figura 13 mostra uma fonte de luz com formato de letra  $j$ . A base da letra é uma fonte pontual sobre o eixo óptico do espelho. Aplica-se a ela o que aprendemos até aqui.

Assim, chamamos de  $p$  a distância entre a base da fonte e o ponto onde o eixo óptico encontra o espelho. A base da letra na imagem estará então à distância  $q$  do espelho, onde  $q$  é dado pela Eq. (23).

Para descrever o restante da imagem, precisamos determinar a posição de outro de seus pontos. O mais simples é encontrar um ponto característico da fonte e procurar a posição do ponto correspondente na imagem. No caso, trabalharemos com o pingo da letra  $j$ .

Para encontrar a imagem do pingo, o primeiro passo é desenhar o eixo secundário que passa por ele. O eixo secundário é a linha reta que

passa pelo pingo e pelo centro de rotação  $O$  antes de chegar ao espelho. A linha vermelha na figura 13 é o eixo secundário que procuramos.

O eixo secundário se distingue do eixo ótico por não passar pelo centro de simetria na superfície do espelho. Essa distinção não tem grandes consequências, e podemos dar ao eixo secundário o tratamento que demos ao eixo ótico na seção *Espelho esférico*. Em particular, podemos chamar de  $p'$  a distância entre o pingo e o espelho, medida ao longo do eixo secundário. A imagem do pingo estará a uma distância  $q'$  do espelho, medida ao longo do eixo secundário.

Como o ângulo de abertura do espelho é pequeno, o ângulo entre o eixo secundário e o eixo ótico também será pequeno; isso quer dizer que a distância  $p'$  será aproximadamente igual a  $p$  e que  $q' \approx q$ . Geometricamente, podemos ver que o pingo no  $j$  na fonte está na vertical que passa pela base da fonte. A distância horizontal do pingo ao espelho é, portanto,  $p$ . Da mesma forma, o pingo no  $j$  na imagem está na vertical que passa pela base do  $j$  na imagem. A distância  $q'$  até o espelho é, portanto, aproximadamente igual a  $q$ .

Como a figura mostra, a imagem da fonte vertical também é vertical, e a imagem é invertida em relação à fonte.

### Tamanho da imagem

Da figura 13, podemos também extrair o tamanho da imagem. O triângulo formado pela fonte e o ponto  $O$ , na parte esquerda, é semelhante ao triângulo menor, formado pela imagem e o ponto  $O$ . Isso mostra que a razão entre as alturas  $h_A$ , da fonte, e  $h_B$ , da imagem:

$$\frac{h_A}{h_B} = \frac{p - R}{R - q'} \quad (27)$$

já que a base do triângulo maior é  $p - R$ , enquanto a do triângulo menor é  $R - q'$ .<sup>2</sup>

Para simplificar a Eq. (27), fatoramos  $pR$  no numerador e  $qR$  no denominador do lado direito. Resulta que

$$\frac{h_A}{h_B} = \frac{\frac{1}{R} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{R}} \quad (28)$$

Da Eq. (22), porém, podemos ver que  $1/R - 1/p = 1/q - 1/R$ . Assim, a primeira fração à direita na Eq. (28) é igual à unidade, e a equação se reduz à expressão

$$\frac{h_A}{h_B} = \frac{p}{q'} \quad (29)$$

<sup>2</sup> A distância  $q$ , do  $j$  imagem até o espelho, é menor do que o raio do espelho; por isso, o comprimento do cateto horizontal no triângulo à esquerda na figura 13 é  $R - q$ , e não  $q - R$ .

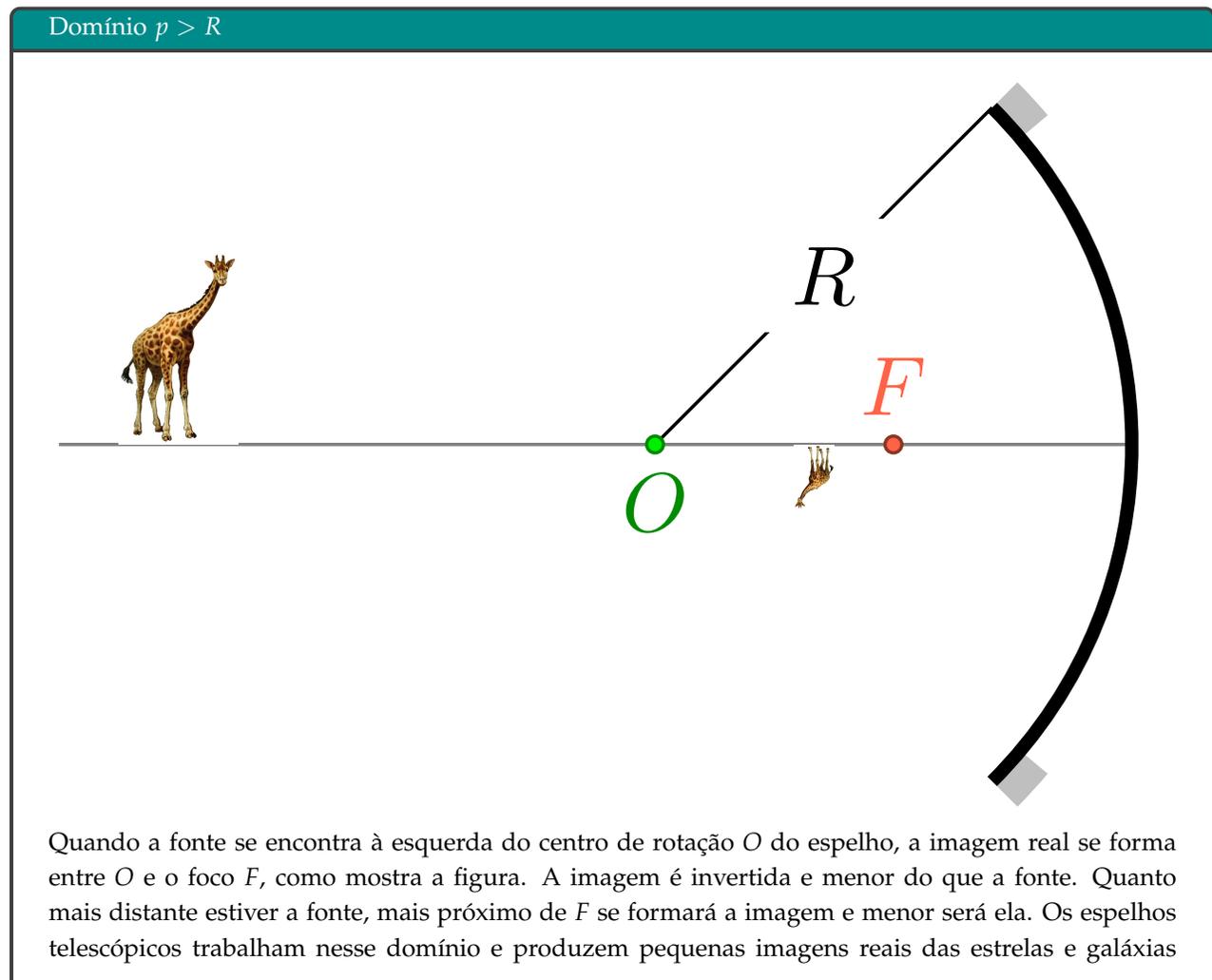
ou seja,

$$h_B = h_A \frac{q}{p}, \quad (30)$$

No caso  $p \rightarrow \infty$ , discutido na seção *Foco e distância focal*, por exemplo,  $q$  é a distância focal  $f$ , enquanto  $p \rightarrow \infty$ . A Eq. (30) mostra que a imagem terá altura zero. Um espelho côncavo concentra num ponto — o foco — toda a luz solar que recebe. Quanto mais longe do espelho a imagem se formar, maior ela será. A próxima seção mostra exemplos.

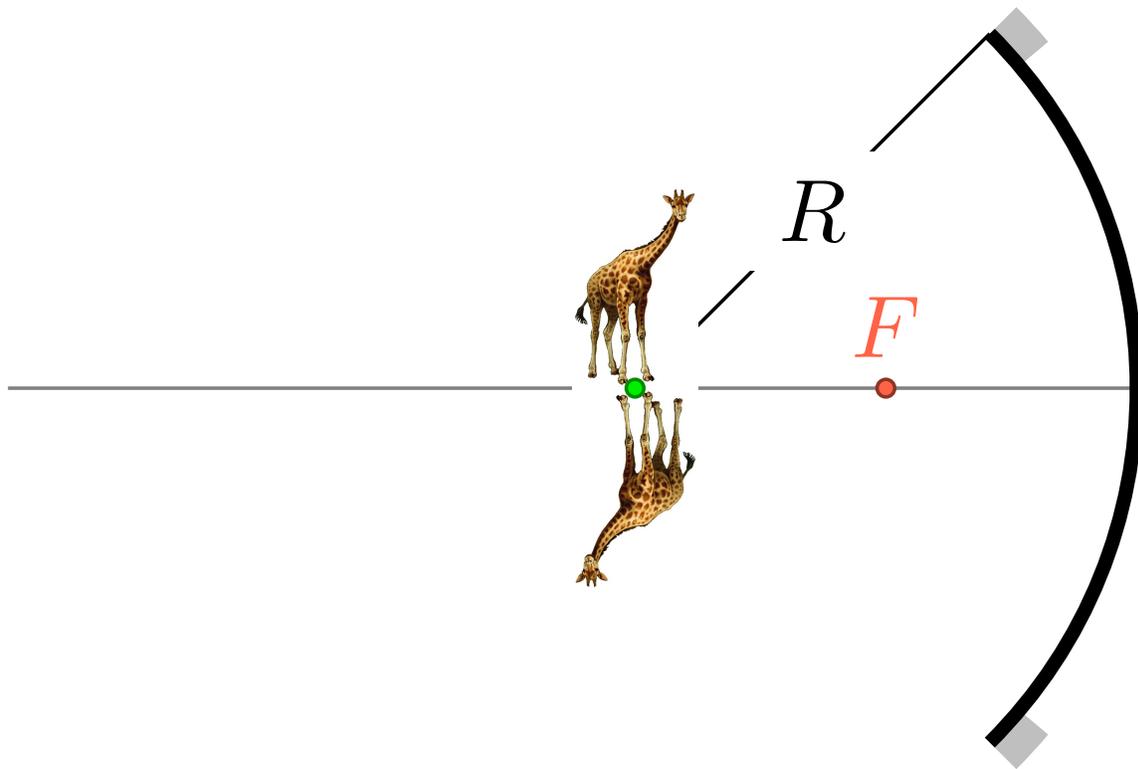
### Posição e tamanho da imagem real

Digamos que a fonte extensa de luz seja uma girafa. Imagine o animal à frente de um espelho côncavo, para vermos que imagem é formada quando a girafa se aproxima do espelho. Para isso, convém dividir o eixo óptico em três domínios: (a)  $p > R$ , (b)  $R > p > f$  e (c)  $f > p$ .



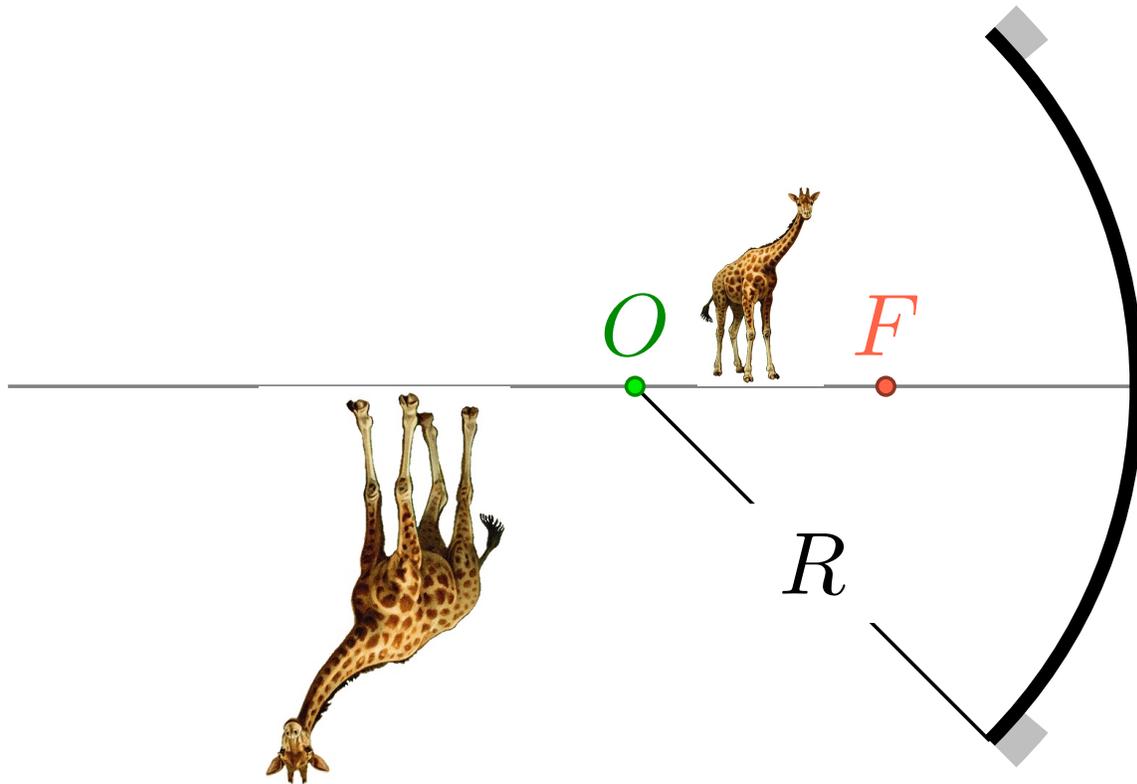
observadas. Veremos depois como essas pequenas imagens são ampliadas para que os astrônomos possam observá-las.

Limiar  $p = R$



A distância  $p = R = 2f$  separa o domínio  $p > R$  do domínio  $R > p > f$ . Para  $p = 2f$ , a Eq. (23) mostra que  $q = 2f$ ; a posição da imagem coincide com a da fonte, e as duas têm o mesmo tamanho. Como mostra a figura, a imagem continua invertida em relação à fonte.

Entender o comportamento da luz nesse ponto é especialmente simples: cada raio emitido pela fonte segue uma direção radial até alcançar o espelho e ser refletido de volta, ao longo da mesma direção radial. Não surpreende, portanto, que a imagem seja quase igual à fonte.

Domínio  $R > p > f$ 

Se a girafa se aproximar do espelho e se posicionar entre o centro de rotação e o foco, teremos situação inversa da que encontramos no domínio  $p > R$ . Agora, o lado direito da Eq. (26) será maior do que  $p$ . A imagem se formará à esquerda do ponto  $O$ , continuará a ser invertida e será maior do que a fonte. Quanto mais perto de  $F$  estiver a girafa, mais crescerá a imagem e mais longe ela se formará. No limite  $p \rightarrow f$ , a imagem se formará no infinito e será infinitamente grande. A geometria será o reverso da mostrada na figura 12: os raios de luz emanados pela fonte se deslocarão paralelamente para a esquerda.

Como os crescimentos ilimitados indicam, a condição  $p = f$  constitui uma singularidade. Podemos esperar comportamento qualitativamente diferente para  $f > p$ .