MAP0217 - Cálculo Diferencial
MAT0311 - Cálculo Diferencial e Integral V
2a. Prova

$2^{\underline{o}}$ Semestre de 2020

Nesta prova você deve escolher 10 "Afirmações" para analisar, responder, justificar e entregar. Deve também entregar tabela abaixo preenchida com suas 10 escolhas, **apresentada no início do seu arquivo**.

Tabela a ser preenchida que deve vir no início de seu arquivo:

Afirmação	V ou F?	Afirmação	V ou F?	Afirmação	V ou F?
Afirmação 1		Afirmação 7		Afirmação 13	
Afirmação 2		Afirmação 8		Afirmação 14	
Afirmação 3		Afirmação 9		Afirmação 15	
Afirmação 4		Afirmação 10		Afirmação 16	
Afirmação 5		Afirmação 11		Afirmação 17	
Afirmação 6		Afirmação 12		Afirmação 18	

Responda se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa, e justifique.

Afirmação 1 *(1.0)* Num espaço métrico (M, d), se $A \subset M$ então A° é a união de todos os abertos contidos em A.

Afirmação 2 *(1.0)* Num espaço métrico (M, d), $A \subset M$ é fechado se e só se $A = A'$.

Afirmação 3 *(1.0)* O subconjunto $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + 3y + z^2 \geq 1 \text{ e } xyz = 3\} \subset \mathbf{R}^3$ é fechado em $\mathbf{R}^3$.

Afirmação 4 *(1.0)* O conjunto das soluções do sistema de inequações abaixo é aberto de $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned} x^4 + 3y + z^3 - \sin(xy^2 + z) &> 0 \\ x - 2y + 3z^2 &< 0 \\ e^x + z^3 &> 0 \end{aligned}$$

Afirmação 5 *(1.0)* No espaço métrico $\mathbf{Q}$ dos números racionais com a métrica usual $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbf{Q}$, todo subconjunto fechado e limitado é compacto.

Afirmação 6 *(1.0)* O conjunto $\{x \in \mathbf{R}^3 \mid \|x\| \leq 1 \text{ e } x_1^3 - 3x_2^2 x_3 + x_1 \cos(x_2 + 2x_3) \geq 0\}$ é compacto em $\mathbf{R}^3$.

Afirmação 7 *(1.0)* Se $f : A = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ é contínua e $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ uma sequência de Cauchy em A então $(f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ resulta de Cauchy em $\mathbf{R}^3$.

Afirmação 8 *(1.0)* Se $f : A = (0, 1) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ é contínua e $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ uma sequência de Cauchy em A então $(f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ resulta de Cauchy em $\mathbf{R}^3$.

Afirmação 9 *(1.0)* Se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ é Lipschitziana e $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ uma sequência de Cauchy então $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ resulta de Cauchy em $\mathbf{R}^3$.

Afirmação 10 *(1.0)* Sejam $M = \mathbf{R}^n$ com a métrica usual d e $N = \mathbf{R}^n$ com a métrica discreta d_*. Então $f : M \to N$ definida por $f(x) = x, \forall x \in M$ é contínua.

Afirmação 11 *(1.0)* Sejam $M = \mathbf{R}^n$ com a métrica usual d e $N = \mathbf{R}^n$ com a métrica discreta d_*. Então $g : N \to M$ definida por $f(x) = x, \forall x \in M$ é contínua.

Afirmação 12 *(1.0)* Seja (M, d) um espaço métrico. Se $K \subset M$ é compacto e $F \subset K$ é fechado não vazio, então F é compacto.

Afirmação 13 *(1.0)* Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $\langle \ \mid \ \rangle$, com a norma $\| \ \|$ e a distância d associadas. Então a bola fechada $B_r[\overline{x}]$ é compacta.

Afirmação 14 *(1.0)* Se (M, d) um espaço métrico compacto, então ele completo.

Afirmação 15 *(1.0)* No conjunto dos números racionais $\mathbf{Q}$ com a métrica usual, existem um subconjunto A infinito, limitado, sem ponto de acumulação, e um subconjuntos B infinito, limitado, com ponto de acumulação.

Afirmação 16 *(1.0)* Seja $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbf{R}$ contínua. Então existe $\overline{x} \to [0, 1] \times [0, 1]$ tal que $f(x) \leq f(\overline{x}), \forall x \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Afirmação 17 *(1.0)* A função $f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad y^2 + z^2 = 30\} \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = \left(xz^2 \cos(y^2) - ye^{xz}, x^3z^2 + 3x^2yz - y^3z^3\right)$, é limitada.

Afirmação 18 *(1.0)* Não existe função contínua definida na superfície de um toro em $\mathbf{R}^3$ cuja imagem é uma esfera de $\mathbf{R}^3$.