Mecânica I – PME3100

Aula 17
Exercícios

E1:

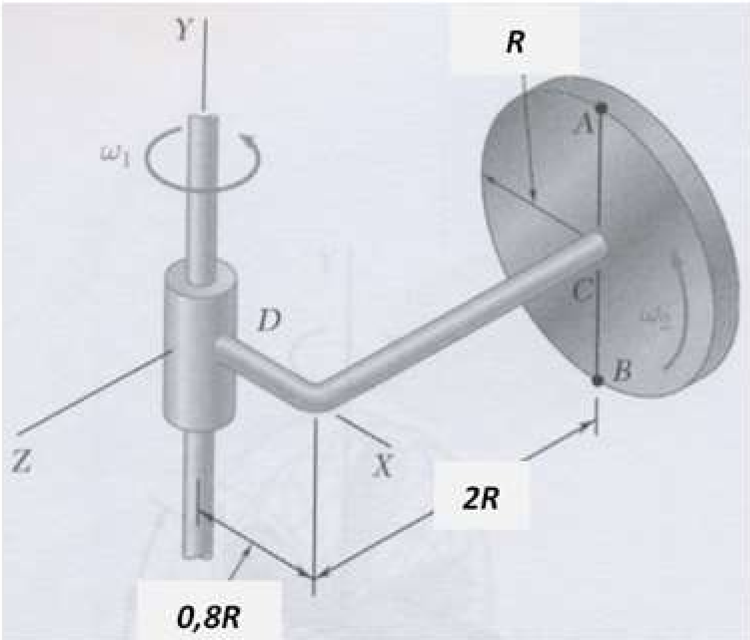
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Um disco de raio R gira à taxa constante ω_2 em relação ao braço CD, que por sua vez gira à taxa constante ω_1 em torno do eixo Y. No instante mostrado na figura, determine:

a) As velocidades relativa $\overline{v}_{Arel}$, de arrastamento $\overline{v}_{Aarr}$ e absoluta $\overline{v}_A$ do ponto A do disco

b) As acelerações relativa $\overline{a}_{Arel}$, de arrastamento $\overline{a}_{Aarr}$, complementar $\overline{a}_{Ac}$ e absoluta $\overline{a}_A$ do ponto A do disco

c) O vetor rotação absoluta $\overline{\omega}$ do disco e o vetor aceleração angular absoluta $\dot{\overline{\omega}}$ do disco.



Solução:

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

$$\bar{v}_r = -\omega_2 R\bar{i} \qquad \bar{v}_a = -2\omega_1 R\bar{i} - 0{,}8\omega_1 R\bar{k} \qquad \bar{v}_A = \left(-\omega_2 R - 2\omega_1 R\right)\bar{i} - 0{,}8\omega_1 R\bar{k}$$

$$\bar{a}_r = -\omega_2^2 R\bar{j} \qquad \bar{a}_a = -0{,}8\omega_1^2 R\bar{i} + 2\omega_1^2 R\bar{k} \qquad \bar{a}_c = 2\omega_1\omega_2 R\bar{k}$$

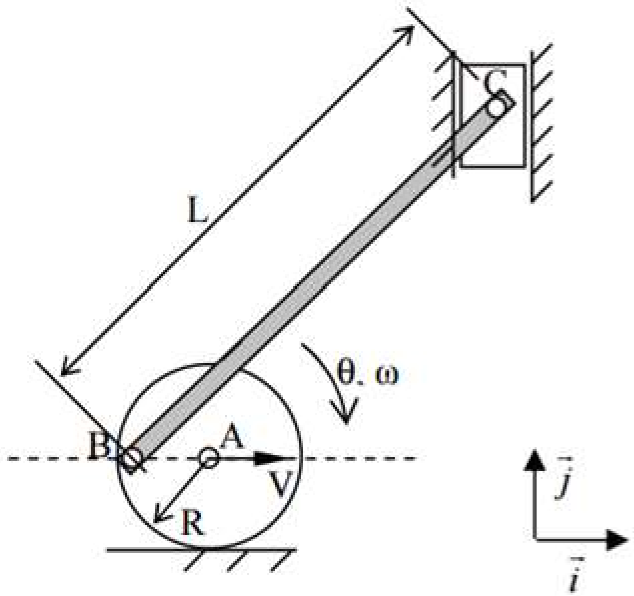
$$\bar{a}_A = -0{,}8\omega_1^2 R\bar{i} - \omega_2^2 R\bar{j} + \left(2\omega_1^2 R + 2\omega_1\omega_2 R\right)\bar{k}$$

$$\bar{\omega} = \omega_1\bar{j} + \omega_2\bar{k} \qquad \dot{\bar{\omega}} = \omega_1\omega_2\bar{i}$$

E2:

Considere o mecanismo da figura ao lado, em que um disco de raio R rola **com escorregamento** no contato com um plano fixo. A velocidade angular do disco é $\vec{\omega} = -(V/2R)\vec{k}$, e a velocidade de seu centro A, $\vec{V}_A = V\vec{i}$, ambas constantes. O ponto B do disco está articulado a uma barra BC de comprimento L e cuja extremidade C está articulada a um bloco que pode se mover apenas na direção vertical. Nessas condições, pedem-se:

(a) a velocidade do ponto C e velocidade angular da barra BC;
(b) a aceleração do ponto B;
(c) o CIR do disco de centro A (graficamente e analiticamente).



Solução:

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \wedge (C - B) \Rightarrow v_C \vec{j} = \vec{v}_B + \omega_{BC} \vec{k} \wedge L(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j})$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A) = V\vec{i} - \frac{V}{2R}\vec{k} \wedge (-R\vec{i}) = V(\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j})$$

$$\therefore v_C \vec{j} = V(\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}) + L\omega_{BC}(\cos\theta \vec{j} - \sin\theta \vec{i})$$

$$\vec{i} : 0 = V - L\omega_{BC} \sin\theta \Rightarrow \omega_{BC} = \frac{V}{L\sin\theta} \Rightarrow \vec{\omega}_{BC} = \frac{V}{L\sin\theta}\vec{k}$$

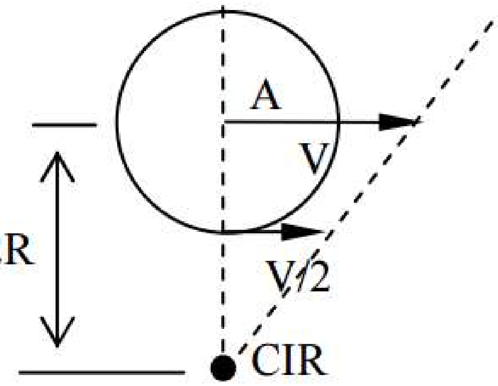
$$\vec{j} : v_C = \frac{V}{2} + L\frac{V}{L\sin\theta}\cos\theta \Rightarrow \vec{v}_C = V\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\tan\theta}\right)\vec{j}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - A)] = \vec{0} + \vec{0} + \left(-\frac{V}{2R}\vec{k}\right) \wedge \left(-\frac{V}{2R}\vec{k} \wedge (-R\vec{j})\right)$$

$$\vec{a}_B = \frac{V^2}{4R}\vec{i}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \wedge (A - CIR) = \vec{0} + \left(-\frac{V}{2R}\vec{k} \right) \wedge |(A - CIR)|\vec{j}$$

$$V\vec{i} = \frac{V}{2R}|(A - CIR)|\vec{i} \Rightarrow |(A - CIR)| = 2R \therefore (A - CIR) = 2R\vec{j}$$



E3:

Um ponto M percorre a curva descrita por

$$\begin{cases} x = a(1+\cos\theta)\cdot\cos\theta \\ y = a(1+\cos\theta)\cdot\sin\theta \\ z = \theta \end{cases}$$

de acordo com a lei horária $\theta = \frac{t}{2}$. Pede-se determinar, no instante $t = \frac{\pi}{2}$

(a) a velocidade de M;
(b) a aceleração de M;
(c) os versores $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ do triedro de Frenet em M.

Solução:

A velocidade de M em qualquer instante, é dada por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{dx}{d\theta}\vec{i} + \frac{dy}{d\theta}\vec{j} + \frac{dz}{d\theta}\vec{k} \right) \cdot \frac{d\theta}{dt},$$

em que

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta + 2a(-\sin\theta)\cos\theta = -a\sin\theta - a\sin 2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta + a(-\sin\theta)\sin\theta + a\cos\theta\cos\theta = a\cos\theta - a\cos 2\theta$$

$$\frac{dz}{d\theta} = 1$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}$$

Resulta, portanto:

$$\vec{v} = -\frac{a}{2}(\sin\theta + \sin 2\theta)\vec{i} + \frac{a}{2}(\cos\theta - a\cos 2\theta)\vec{j} + \vec{k}$$

No instante $t = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ e a velocidade de M é:

$$\vec{v}\left(t = \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{a}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \frac{a}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - a\cos\frac{\pi}{2}\right)\vec{j} + \vec{k}$$

$$\therefore \vec{v}\left(t = \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{a}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} + a\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\vec{k}$$

A aceleração de M em qualquer instante, é:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{dv_x}{d\theta}\vec{i} + \frac{dv_y}{d\theta}\vec{j} + \frac{dv_z}{d\theta}\vec{k} \right) \cdot \frac{d\theta}{dt},$$

em que

$$\frac{dv_x}{d\theta} = -\frac{a}{2}(\cos\theta - 2\cos 2\theta)$$

$$\frac{dv_y}{d\theta} = \frac{a}{2}(-\sin\theta + 2\sin 2\theta)$$

$$\frac{dv_z}{d\theta} = 0$$

Resulta, portanto:

$$\vec{\gamma} = \frac{a}{4}\left[-(\cos\theta + 2\cos 2\theta)\vec{i} + (-\sin\theta + 2\sin 2\theta)\vec{j}\right]$$

No instante $t = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ e a aceleração de M é:

$$\vec{\gamma}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{4}\left[-\left(\cos\frac{\pi}{4} + 2\cos\frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \left(-\sin\frac{\pi}{4} + 2\sin\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}\right]$$

$$\therefore \vec{\gamma}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{4}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j}\right]$$

No instante $t = \frac{\pi}{2}$, o versor tangente do triedro de Frenet, é dado por:

$$\vec{\tau}(\pi/2) = \frac{\vec{v}(\pi/2)}{|v(\pi/2)|} = \frac{-\frac{a}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} + a\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\vec{k}}{\sqrt{\left[-\frac{a}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^2 + \left(a\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

Nesse mesmo instante, o versor binormal é dado por:

$$\vec{b}(\pi/2) = \frac{\vec{v}(\pi/2) \wedge \vec{\gamma}(\pi/2)}{|\vec{v}(\pi/2) \wedge \vec{\gamma}(\pi/2)|} = \frac{\left[-\frac{a}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} + a\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\vec{k}\right] \wedge \left\{\frac{a}{4}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j}\right]\right\}}{\left|\left[-\frac{a}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} + a\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\vec{k}\right] \wedge \left\{\frac{a}{4}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j}\right]\right\}\right|}$$

Conseqüentemente, o versor normal, nesse instante, é:

$$\vec{n}(\pi/2) = \vec{b}(\pi/2) \wedge \vec{\tau}(\pi/2)$$

PERGUNTAS?