T3

Questão 1 (1,0pt). Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y = -3\}$. Caracterize esta superfície:

1. Hiperboloide de 2 folhas
2. hiperboloide de 1 folha
3. elipsoide
4. paraboloide elíptico
5. esfera
6. não sei

Aqui usaremos os guias 3 e 4.

Observe que

$$\begin{cases} (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \\ (y-1)^2 = y^2 - 2y + 1 \end{cases}$$

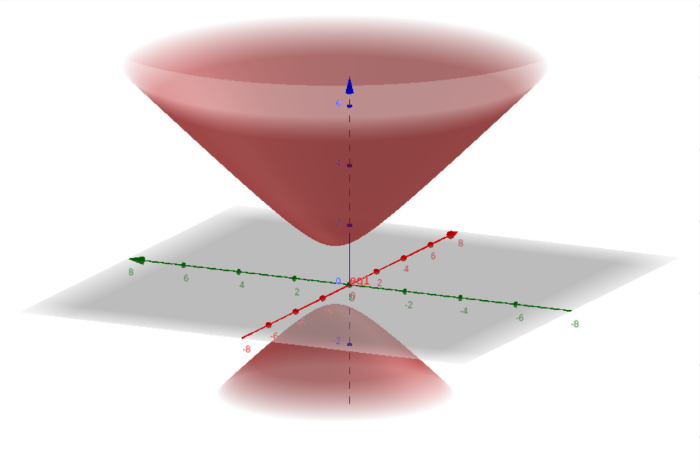
$$x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y = -3$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 - z^2 - 1 - 1 = -3$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 - z^2 = -1$$

Assim, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x-1)^2 + (y-1)^2 - z^2 = 1\}$

é um hiperbolóide de duas folhas



Questão 2 (0,5 pt). Calcule a distância de $p = (0, -3, 1)$ a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 = 1\}$

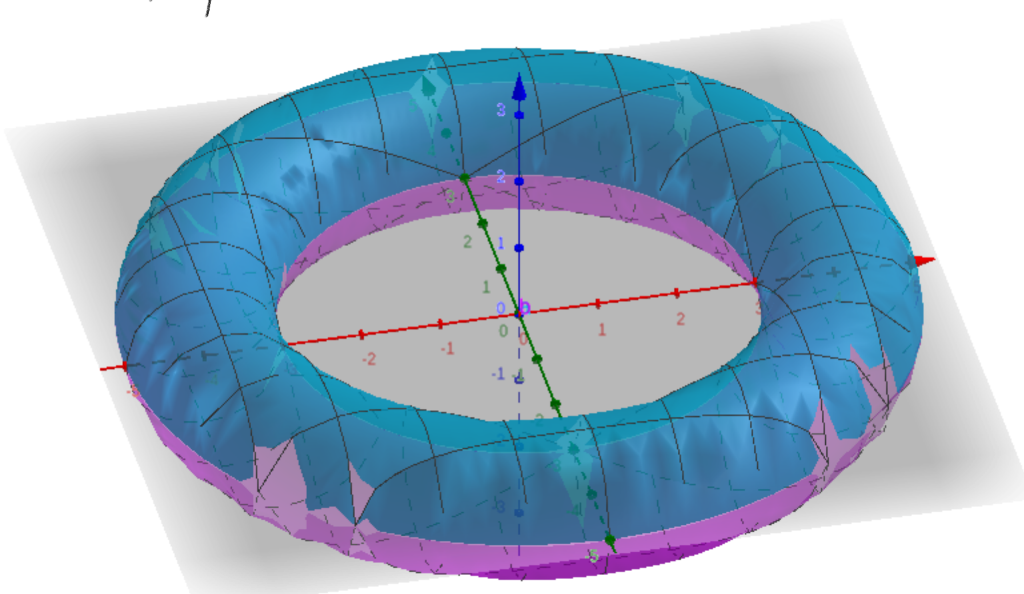
1. $\sqrt{2} - 1$
2. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
3. 1
4. 2
5. 3
6. $\sqrt{3} - 1$
7. 0
8. não sei

Primeiro observe que

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 = 1$$

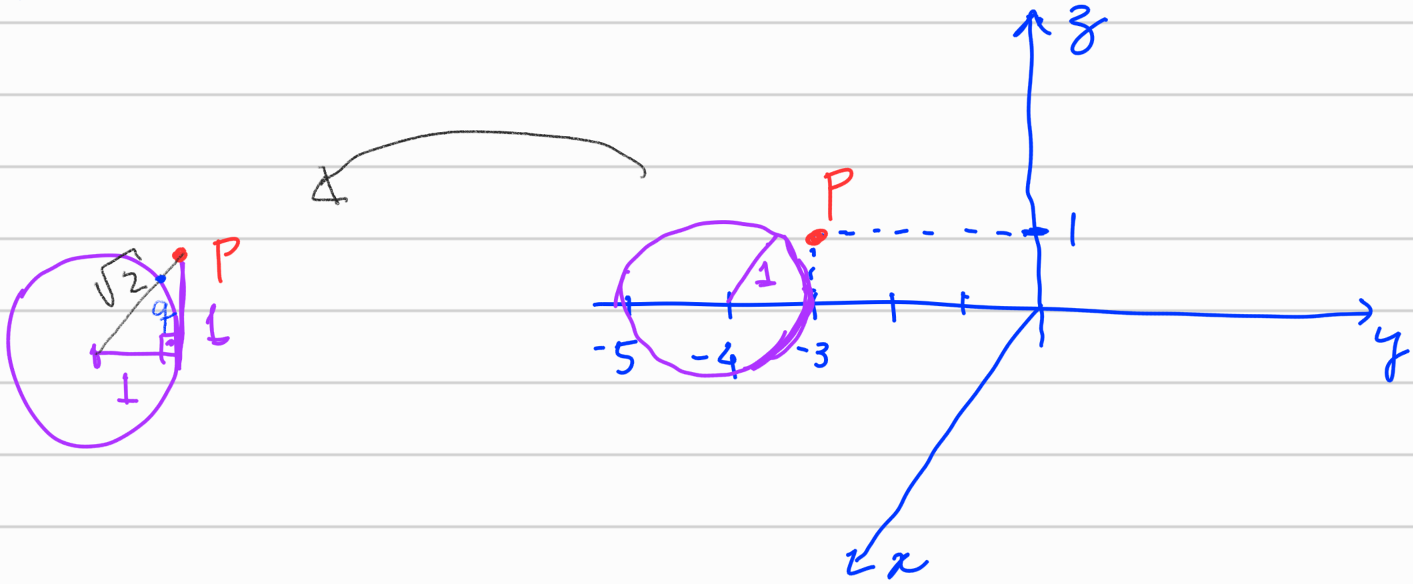
$$z = \pm \sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2}$$

Essa superfície é chamada de TORO

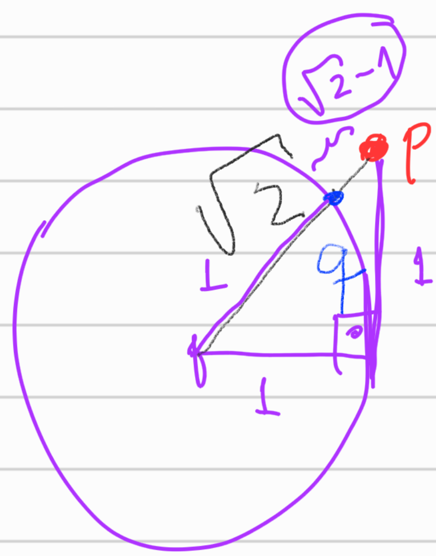


Além disso, também é uma superfície de revolução, pois basta tomar o círculo de raio 1 e centro (4,0,0) e girar em torno do eixo z.

Agora observe o ponto $p=(0,-3,1)$



Queremos a distância do p a q



Assim, $d(p,q)=\sqrt{2}-1$

Questão 3 (0,5 pt). Sejam $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 || 3y + 4z = 2, x, y, z > 0\}$ e $u(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $u(x, y, z) = yz$. Calcule o máximo de u_C ou seja da função u restrita a superfície S

1. $\frac{1}{12}$
2. $\frac{1}{8}$
3. $\frac{1}{6}$
4. 24
5. $\sqrt{2}$
6. não sei.

Isolando y em S temos

$$y = \frac{2 - 4z}{3}$$

Substituindo em u:

$$u(x, y, z) = \left(\frac{2 - 4z}{3}\right) z$$

$$u(x, y, z) = \frac{2z}{3} - \frac{4z^2}{3}$$

Derivando em relação a z e igualando a zero, temos:

$$\frac{du}{dz} = \frac{2}{3} - \frac{8}{3}z = 0$$

$$z = \frac{2}{8} \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{4} > 0 \text{, como em } S}$$

Agora isolando z em S:

$$z = \frac{2-3y}{4}$$

e substituindo em u:

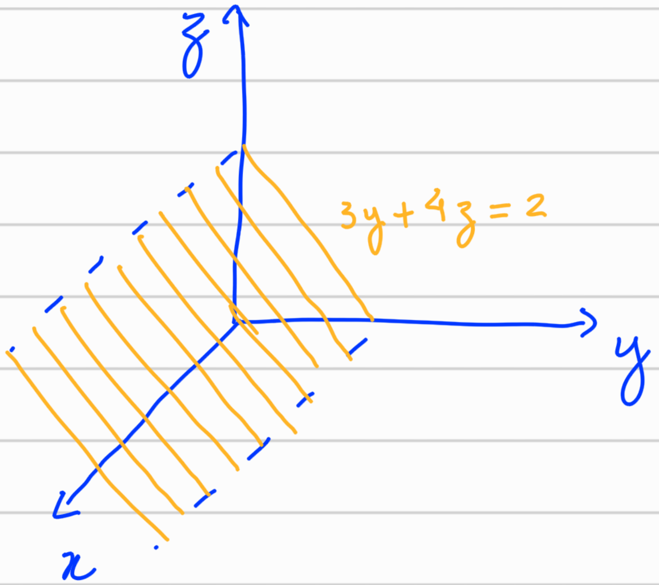
$$u(x,y,z) = y\left(\frac{2-3y}{4}\right) = \frac{2y}{4} - \frac{3y^2}{4}$$

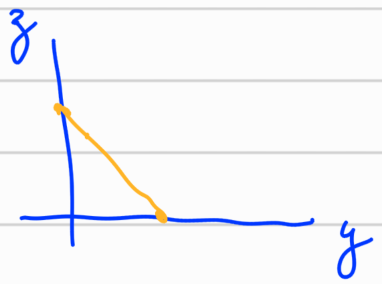
Derivando em relação a y e igualando a zero:

$$\frac{du}{dy} = \frac{2}{4} - \frac{6y}{4} = 0$$

$$\boxed{y = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} > 0 \text{, como em } S}$$

Assim, $u\left(x, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ //


z
y
x
3y + 4z = 2


z
y