FÍSICA II – 2020

MÓDULO IV – INTRODUÇÃO À MECÂNICA DE FLUIDOS

AULA 20 – Viscosidade, força viscosa, número de Reynolds

PRÓLOGO:

AINDA um resultado das equações para $\vec{v}(\vec{r},t)$

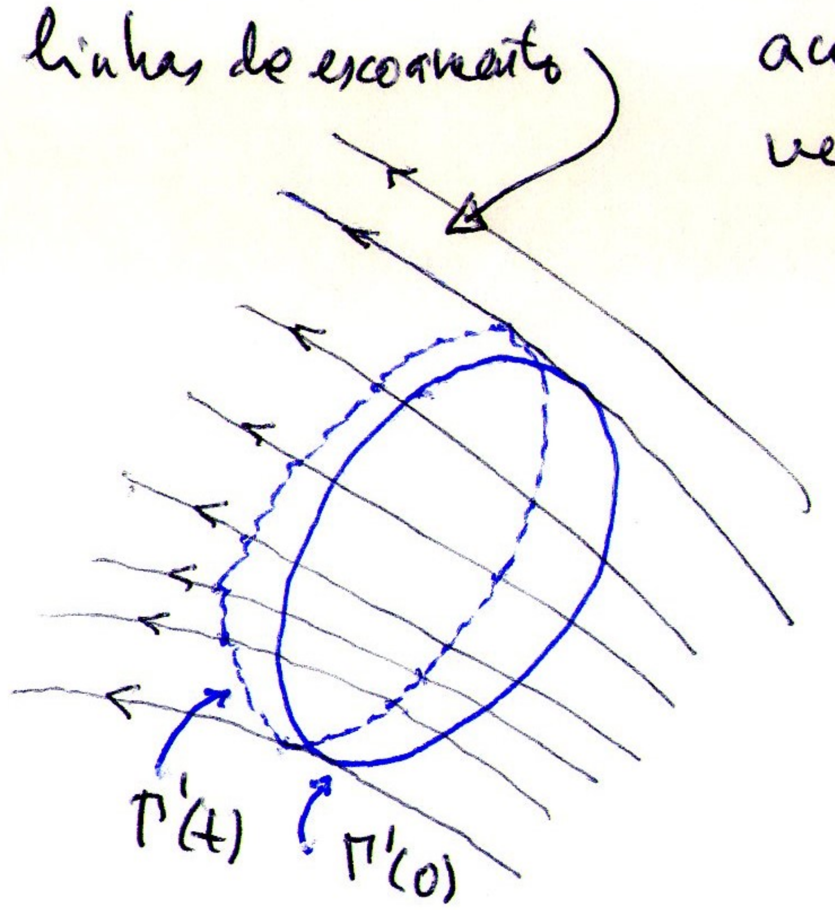
* Fluido ideal incompressível
* Forças volumétricas conservativas

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{\Omega} \\ &\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \\ &\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times(\vec{\Omega}\times\vec{v}) = 0 \end{aligned}}$$

Teoremas de Thomson-Helmholz ('conservação da circulação')

$$\frac{d}{dt}\oint_{\Gamma'(t)} \vec{v}(\vec{r},t)\cdot d\vec{l} \equiv \frac{d}{dt} C_{\Gamma'(t)} = 0$$

circuito que se deforma no tempo acompanhando o campo de velocidades do escoamento.



(Sem demonstração aqui, mas com exemplo (simples!))

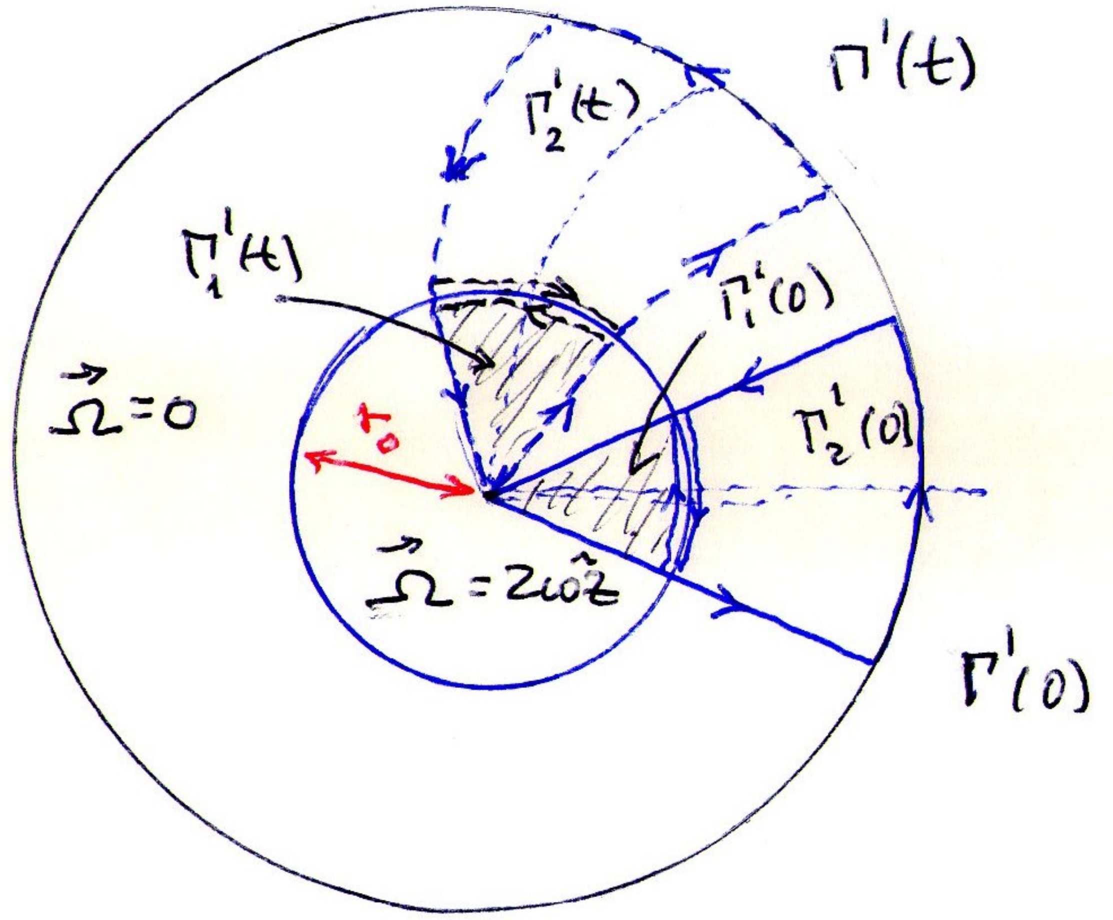
Exemplo: escoamento do 'Caso 3' tratado na aula anterior

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{v}(\vec{r}) = \begin{cases} \omega\hat{z}\times\vec{r} \equiv -\omega y\hat{x} + \omega x\hat{y} & \text{para } x^2+y^2 \leq r_0 \\ \omega r_0^2 \dfrac{\hat{z}\times\vec{r}}{r^2} \equiv \omega r_0^2 \dfrac{-y\hat{x}+x\hat{y}}{x^2+y^2} & \text{para } x^2+y^2 \geq r_0 \end{cases} \qquad \vec{r} \equiv (x\hat{x}+y\hat{y})$$

escoamento estacionário

Vorticidade: $\vec{\Omega}(\vec{r},t) = \vec{\Omega}(\vec{r}) = \begin{cases} 2\omega\,\hat{z} & \text{para } x^2+y^2 \leq r_0 \\ 0 & \text{para } x^2+y^2 > r_0 \end{cases}$

Escoamento: linhas de escoamento $\rightarrow$ círculos paralelos ao plano xy com centro no eixo z, raio r
velocidade tangencial $\begin{cases} \omega r & r \leq r_0 \\ \omega \dfrac{r_0^2}{r} & r > r_0 \end{cases}$



Cálculo rápido da circulação

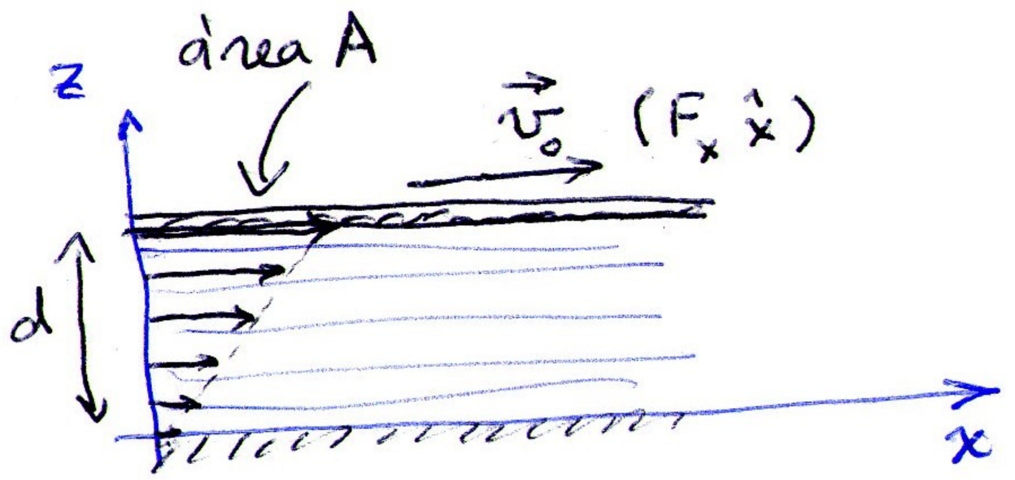
$$\oint_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \int_{S_\Gamma} (\vec{\nabla}\times\vec{v})\cdot d\vec{S}$$

$r<r_0$: o circuito é arrastado rigidamente pelo escoamento

$r>r_0$: o circuito é arrastado com velocidade angular decrescente (partes mais distantes se atrazam mais)

Como $\vec{\Omega}$ = const na parte arrastada rigidamente e zero na outra parte, a circulação permanece constante.

VISCOSIDADE (Fluido Newtoniano)

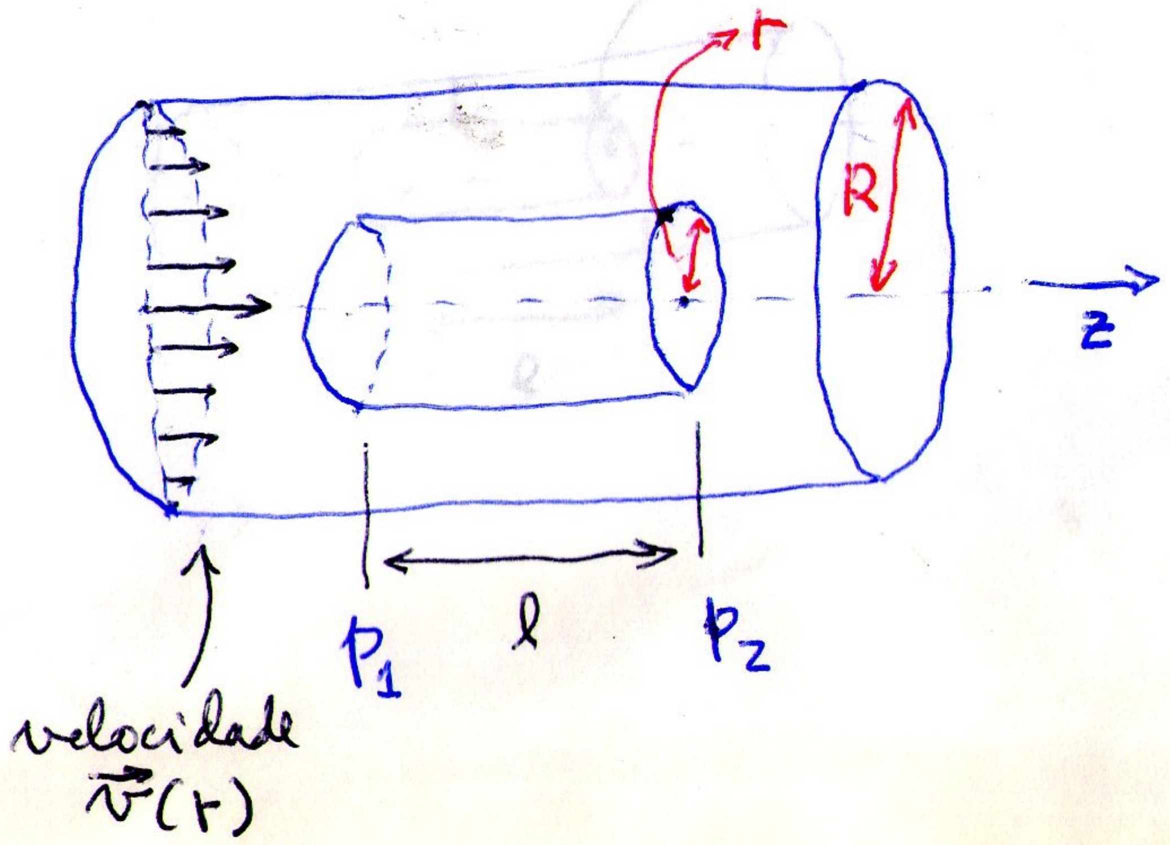


$$\frac{F_x}{A} = \eta \frac{v_0}{d} = \eta \frac{dv_x}{dz}$$

>0

estacionário!

* Uso direto desta definição no escoamento viscoso ao longo de um tubo (fluido incompressível)



Força de pressão sobre a porção cilíndrica de fluido

$$F_z = \pi r^2 (p_1 - p_2)$$

Área da superfície: $A = 2\pi r \ell$

v_z diminui quando r cresce

$$\frac{F_z}{A} = \frac{r(p_1 - p_2)}{2\ell} = -\eta \frac{dv_z}{dr}$$

$$\boxed{\frac{dv_z}{dr} = -\frac{(p_1 - p_2)}{2\ell\eta} r}$$

$$v_z(r) = \text{Const} - \frac{p_1 - p_2}{4\ell\eta} r^2$$

Condição de contorno: $v_z(R) = 0$

$$\boxed{v_z(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\ell\eta}(R^2 - r^2)}$$

(Hagen-Poiseuille)

* É necessário haver uma diferença de pressão, $p_1 - p_2$, maior para η maior, para manter o escoamento viscoso estacionário

Cálculo da vazão e comparação com caso não viscoso ($\eta \to 0$).

$$\boxed{V} = \int_0^R 2\pi r\, v_z(r)\, dr = 2\pi \frac{p_1 - p_2}{4 l \eta} \int_0^R (R^2 r - r^3)\, dr = \boxed{\frac{\pi R^4}{8 \eta l}(p_1 - p_2)}$$

vazão proporcional à diferença de pressão e a R^4 !

Limite $\eta \to 0$

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{\pi R^4}{8 \eta l}(p_1 - p_2) \to ?$$

* Limite com vazão constante:

$$\frac{\pi R^4}{8 l}(p_1 - p_2) = \eta V$$

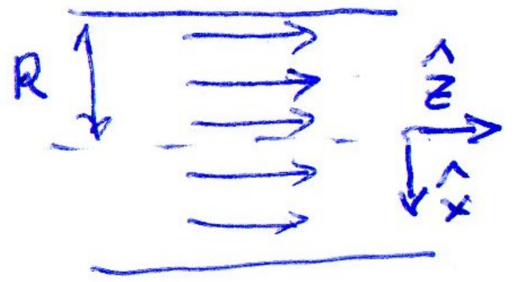
$$\downarrow \eta \to 0$$

$$\boxed{p_1 - p_2 \to 0}$$

o fluido não viscoso mantém a vazão sem diferença de pressão.

* Escoamento não viscoso 'ab initio':

$t = 0$: $\vec{v}(r) = v_0 \hat{z}$ $\qquad \vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$



$\vec{v}(\vec{r}, t) = v_0 \hat{z}$ (escoamento estacionário)

Eq. de Euler:

$$0 = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} \frac{p}{\rho} + g \hat{x} \longrightarrow p = \text{const} + \rho g x$$

p não depende de z!
(atenção à orientação dos eixos)

Vazão: $\boxed{V = \pi R^2 v_0}$

prop. a R^2

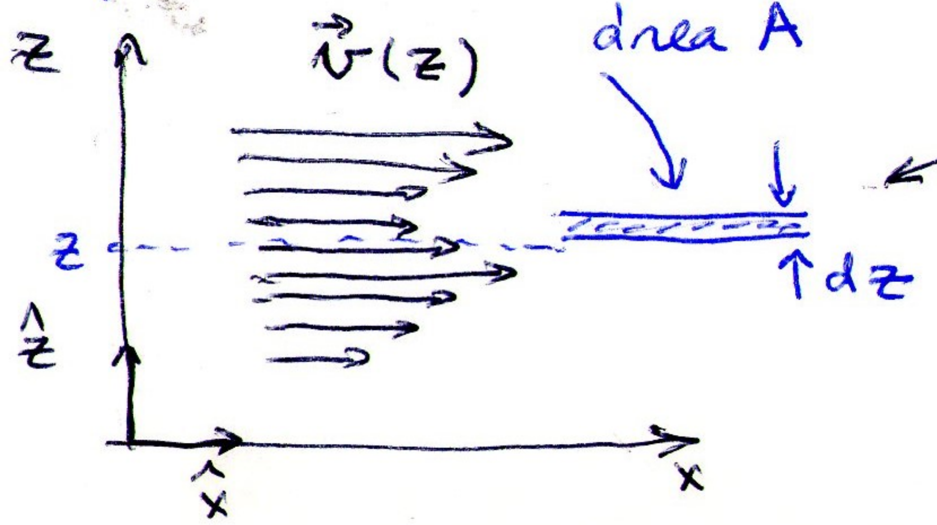
EQUAÇÃO DE MOVIMENTO para o campo de velocidades, no caso de um fluido viscoso

incompressível

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega}\times\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \frac{\vec{\nabla} u}{\rho} + \frac{1}{\rho}\vec{f}_{visc}$$

o que é?

* 1) Caso particular simples: $\boxed{\vec{v} = v_x(z)\,\hat{x}}$ velocidade só na direção $\hat{x}$, depende só de z.



'placa' de fluido de área A e espessura dz nesse campo de velocidades

Parte superior da placa: $\dfrac{F_x(z+dz)}{A} = \eta \dfrac{dv_x}{dz}(z+dz)$

Parte inferior da placa: $\dfrac{F_x(z)}{A} = \eta \dfrac{dv_x}{dz}(z)$

Força líquida sobre o fluido da placa: $$F_x(z+dz) - F_x(z) = \underbrace{A\,dz}_{\text{volume}}\,\eta\,\overbrace{\frac{\frac{dv_x}{dz}(z+dz) - \frac{dv_x}{dz}(z)}{dz}}^{\frac{d^2 v_x}{dz^2}(z)}$$

força de arrasto devida à placa logo acima

Reação (3ª lei) à força de arrasto da placa logo abaixo.

* Força viscosa (volumétrica!): $$\boxed{f(z)_{visc}\,\hat{x} = \frac{F_x(z+dz) - F_x(z)}{A\,dz}\,\hat{x} = \eta\,\frac{d^2 v_x}{dz^2}\,\hat{x}}$$

2) Um atalho formal para o caso geral.

* No caso particular $\boxed{\vec{f}_{visc}(z) = \eta \dfrac{d^2 v_x}{dz^2}\hat{x}}$ envolve uma derivada segunda do campo de velocidades.

* Em geral, há apenas duas quantidades de natureza vetorial envolvendo derivadas segundas de um campo vetorial, como é $\vec{v}(\vec{r},t)$:

a) $\nabla^2 \vec{v} \equiv \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{v}(x,y,z,t)$

b) $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) \equiv \vec{\nabla}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}\right)$

* A quantidade b) é zero no caso de um fluido incompressível ($\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$, da equação de continuidade).

Nessas condições, no caso geral deve-se ter

$$\boxed{\vec{f}_{visc}(\vec{r},t) = \eta \nabla^2 \vec{v}(\vec{r},t)}$$

A NOVA equação de movimento (fluido incompressível)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega}\times\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \frac{\vec{\nabla} u}{\rho} + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{v}$$

$\Big\downarrow$ tomando $\vec{\nabla}\times$

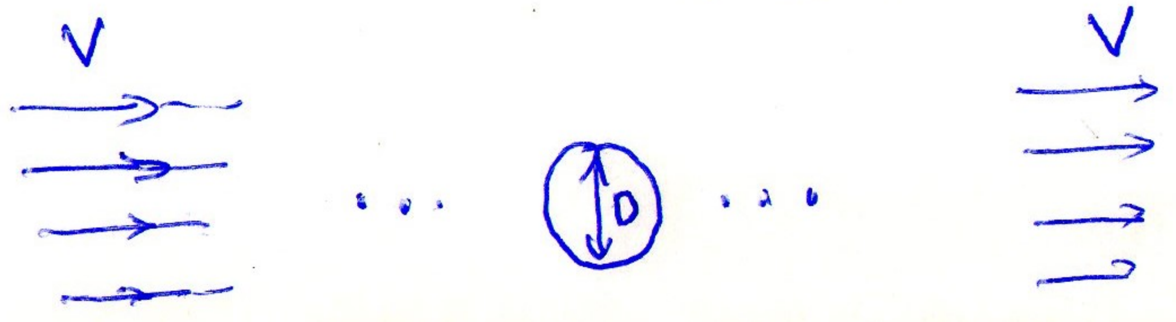
(A') $$\boxed{\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times(\vec{\Omega}\times\vec{v}) = \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{\Omega}}$$

e ainda

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{\Omega}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$$

Um caso: cilindro de diâmetro D num fluido incompressível com velocidade assintótica V

de densidade ρ e viscosidade η



parâmetros: D, V, ρ, η

Usando os parâmetros é possível escrever uma versão 'adimensional' da equação (A'). Para isso:

$$\vec{r}\,' \equiv \frac{\vec{r}}{D} \qquad x' = \frac{x}{D}, \text{etc.} \rightarrow x' \text{ 'adimensional', medido em unidades de } D$$

$$t' = t\,\frac{V}{D}$$

Nas variáveis escalonadas: $\vec{r} \rightarrow D\vec{r}\,'$; $t \rightarrow \frac{D}{V}t'$; $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{V}{D}\frac{\partial}{\partial t'}$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial x'}$$

com isso, e.g. $\vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}\,'\frac{V}{D}$,

$\vec{v} \rightarrow V\vec{v}\,'$, etc.

Então

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{\Omega} \longrightarrow \frac{V^2}{D^2}\left[\frac{\partial \vec{\Omega}'}{\partial t'} + \vec{\nabla}' \times (\vec{\Omega}' \times \vec{v}')\right] = \frac{\eta}{\rho}\frac{V}{D^3}\nabla'^2 \vec{\Omega}'$$

ou seja $$\frac{\partial \vec{\Omega}'}{\partial t'} + \vec{\nabla}' \times (\vec{\Omega}' \times \vec{v}') = \frac{\eta}{\rho V D} \nabla'^2 \vec{\Omega}'$$

Def: $\frac{1}{R}$

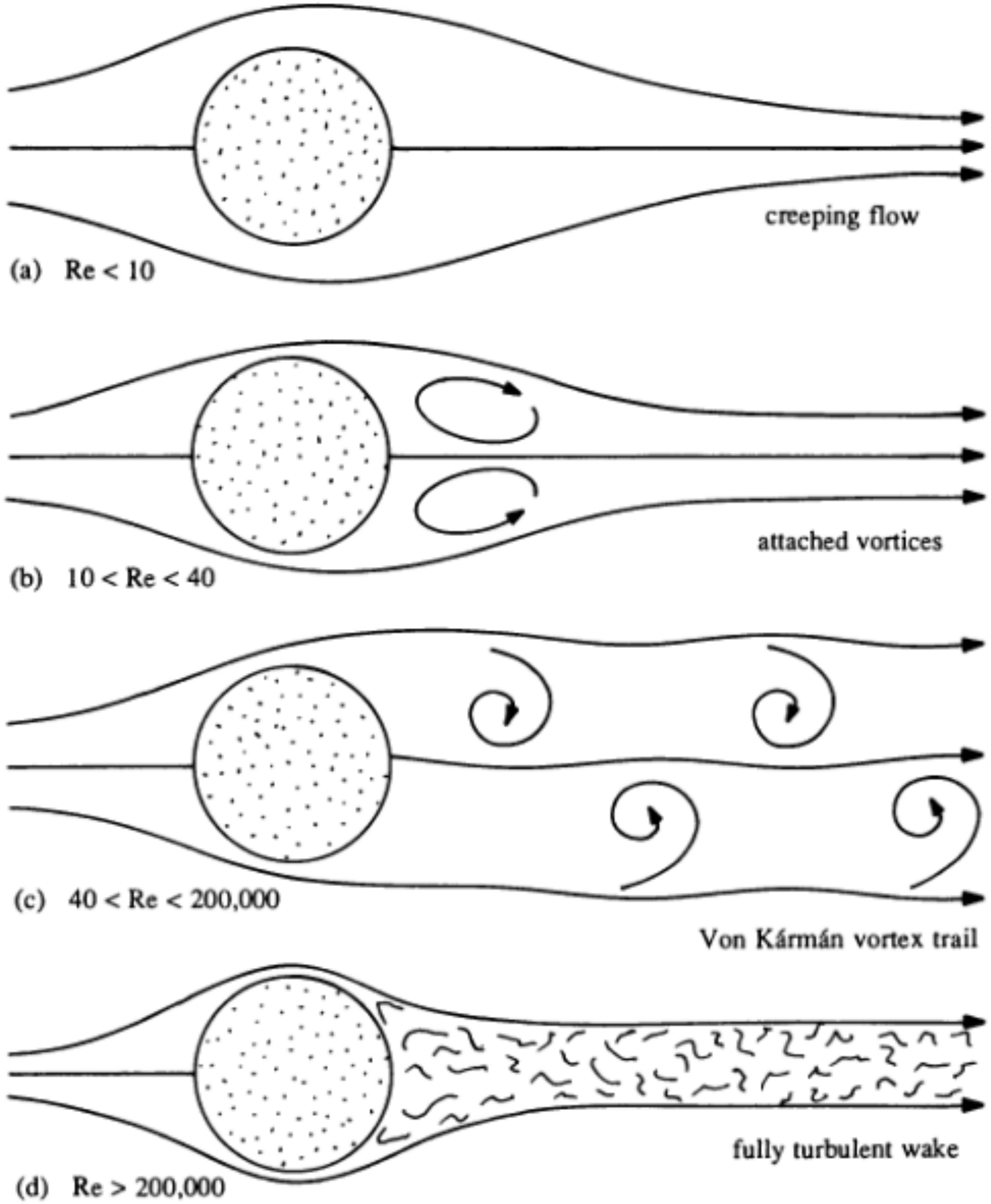
$$\boxed{R \equiv \frac{\rho V D}{\eta} = \text{número de Reynolds}}$$

Adimensional! (Verificar)

Quer dizer: mudando, no caso, as escalas da situação de forma a manter R constante se obtém soluções iguais nas variáveis escalonadas.

Observação: o limite $\eta \to 0$ $(R \to \infty)$ recupera a equação de evolução da vorticidade $\vec{\Omega}$ para o caso não viscoso.

(o coeficiente do termo ligado às forças de viscosidade é $\frac{1}{R}$!)



creeping flow
(a) Re < 10
attached vortices
(b) 10 < Re < 40
(c) 40 < Re < 200,000
Von Kármán vortex trail
fully turbulent wake
(d) Re > 200,000

Comportamento "paradoxal" no limite $\eta \to 0$:

$$\boxed{R = \rho \frac{VD}{\eta}}$$

* Redução da viscosidade η aumenta R reduzindo também o coeficiente de $\nabla'^2 \vec{\Omega}'$

$\frac{1}{R}$

* Aumento de R aumenta a complexidade do escoamento viscoso.

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial t} + \vec{\nabla}' \times (\vec{\Omega}' \times \vec{v}') = \frac{1}{R} \nabla'^2 \vec{\Omega}'$$

Termo com derivadas de ordem mais alta (2ª)

* Derivação adicional 'amplifica' irregularidades 'finas' de $\vec{\Omega}$, compensando efeitos do aumento de R

* Soluções com R grande não se aproximam de soluções com viscosidade zero!

Limite não anunciado por soluções com R grande!

Fim do Módulo IV !