1ª Prova de Equações Diferenciais e Aplicações
MAT 130 - 06/10/2020

Questão 1

(1) $y' = \frac{x^2+x^2e^{(\frac{y}{x})^2}+y^2e^{(\frac{y}{x})^2}}{2xye^{(\frac{y}{x})^2}}$

Chamo $u = \frac{y}{x}$ e obtenho $u' = \frac{y'x-y}{x^2} \implies \frac{u'x^2+y}{x} = y' \implies u'x+u = y' \implies u'x+u = \frac{x^2+x^2e^{(\frac{y}{x})^2}+y^2e^{(\frac{y}{x})^2}}{2xye^{(\frac{y}{x})^2}} \implies u'x+u = \frac{x^2+x^2e^{u^2}+y^2e^{u^2}}{2xye^{u^2}}$

Dividindo por x^2, temos $u'x+u = \frac{1+e^{u^2}+u^2e^{u^2}}{2ue^{u^2}}$

Daí, observamos que $u'x = \frac{1+e^{u^2}+u^2e^{u^2}}{2ue^{u^2}} - u = \frac{1+e^{u^2}+u^2e^{u^2}-u^2e^{u^2}}{2ue^{u^2}} = \frac{1+e^{u^2}}{2ue^{u^2}}$

Portanto, temos uma equação de variáveis separáveis, de onde sai que $\int \frac{2ue^{u^2}}{1+e^{u^2}}du = \int \frac{1}{x}dx$

Fazendo $v = 1+e^{u^2}$, integramos por substituição de variável e obtemos $\int 2\frac{1}{2v}dv = \int \frac{1}{x}dx \implies ln|v| = ln|x|+c \implies ln|1+e^{u^2}| = ln|x|+c \implies ln|1+e^{(\frac{y}{x})^2}| = ln|x|+c$

Queremos agora isolar y: $ln|1+e^{(\frac{y}{x})^2}| = ln|x|+c \implies e^{(\frac{y}{x})^2} = e^{ln|x|+c}-1 \implies y = x\sqrt{ln(e^{ln|x|+c}-1)}$ ou $y = -x\sqrt{ln(e^{ln|x|+c}-1)}$

(2) $(3yx+4cosy+4x^2)dx+(x^2-2xseny)dy = 0$

$(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})(x,y) = 2x-2seny-(3x-4seny) = x-2seny$

$-(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q})(x,y) = \frac{x-seny}{x^2-2xseny} = \frac{1}{x}$ (depende apenas de x)

Logo, o fator integrante será $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx}$ e, portanto, podemos tomar como fator integrante $\mu(x) = x$

Multiplicando a E.D.O. inicial por $\mu(x)$ para torná-la exata, obtemos a nova E.D.O. $(3yx^2+4xcosy+4x^3)dx+(x^3-2x^2seny)dy = 0$

Vamos calcular agora o potencial $\varphi(x,y)$

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = 3yx^2+4xcosy+4x^3 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = x^3-2x^2seny \end{cases}$$

Observamos que $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = 3yx^2+4xcosy+4x^3$, de onde vem que $\varphi(x,y) = \int(3yx^2+4xcosy+4x^3)dx \implies \varphi(x,y) = yx^3+2x^2cosy+x^4+k(y)$, onde $k(y)$ é constante em relação a x.

Derivando $\varphi(x,y)$ em relação a y, obtemos $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = x^3-2x^2seny+k'(y)$ e, como sabemos que $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = x^3-2x^2seny$, obtemos que $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = x^3-2x^2seny+k'(y) = x^3-2x^2seny \implies k'(y) = 0 \implies k(y) = c$, onde c é constante.

Portanto, obtemos a família de potenciais $\varphi(x,y) = yx^3 + 2x^2cosy + x^4 + c$ e podemos tomar o potencial $\varphi(x,y) = yx^3 + 2x^2cosy + x^4$

As soluções da E.D.O. serão, portanto, dadas na forma implícita pelas curvas de nível $yx^3 + 2x^2cosy + x^4 = \bar{c}$, com $\bar{c}$ constante.

Questão 2

(1) $(8yx + y^2senx)dx + (4x^2 - 2ycosx + 2y)dy = 0, y(1) = 1$

$(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})(x,y) = 8x + 2ysenx - 8x - 2ysenx = 0$

A equação é exata. Vamos então encontrar o potencial $\varphi(x,y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 8yx + y^2senx \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 4x^2 - 2ycosx + 2y \end{cases}$$

Observamos que $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 4x^2 - 2ycosx + 2y$, de onde vem que $\varphi(x,y) = \int(4x^2 - 2ycosx + 2y)dy \implies \varphi(x,y) = 4yx^2 - y^2cosx + y^2 + k(x)$, onde $k(x)$ é constante em relação a y.

Derivando $\varphi(x,y)$ em relação a x, obtemos $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 8yx + y^2senx + k'(x)$ e, como sabemos que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 8yx + y^2senx$, obtemos que $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 8yx + y^2senx + k'(x) = 8yx + y^2senx \implies k'(x) = 0 \implies k(x) = c$, onde c é constante.

Portanto, obtemos a família de potenciais $\varphi(x,y) = 4yx^2 - y^2cosx + y^2 + c$ e podemos tomar o potencial $\varphi(x,y) = 4yx^2 - y^2cosx + y^2$

As soluções da E.D.O. serão, portanto, dadas na forma implícita pelas curvas de nível $4yx^2 - y^2cosx + y^2 = \bar{c}$, com $\bar{c}$ constante. Considerando que y(1) = 1, substituímos para encontrar a constante $\bar{c}$: $4yx^2 - y^2cosx + y^2 = \bar{c} \implies 4 - cos1 + 1 = \bar{c} \implies \bar{c} = 5 - cos1$

Logo, temos como solução $4yx^2 - y^2cosx + y^2 = 5 - cos1$

(2) $(x+1)\frac{dy}{dx} + y = lnx, y(1) = 10$

Na forma normal, temos $(lnx - y)dx - (x+1)dy = 0$

$(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})(x,y) = -1 + 1 = 0$

A equação é exata. Vamos então encontrar o potencial $\varphi(x,y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = lnx - y \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -(x+1) \end{cases}$$

Observamos que $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -(x+1)$, de onde vem que $\varphi(x,y) = \int(-(x+1))dy \implies \varphi(x,y) = -(x+1)y + k(x)$, onde $k(x)$ é constante em relação a y.

Derivando $\varphi(x,y)$ em relação a x, obtemos $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -y + k'(x)$ e, como sabemos que $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = lnx - y$, obtemos que $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = -y + k'(x) = lnx - y \implies k'(x) = lnx \implies k(x) = xlnx - x + c$, onde c é constante.

Portanto, obtemos a família de potenciais $\varphi(x,y) = -(x+1)y + xlnx - x + c$ e podemos tomar o potencial $\varphi(x,y) = -(x+1)y + xlnx - x$

As soluções da E.D.O. serão, portanto, dadas na forma implícita pelas curvas de nível $-(x+1)y + xlnx - x = \bar{c}$, com $\bar{c}$ constante. Considerando que y(1) = 10, substituímos para encontrar a constante $\bar{c}$: $-(x+1)y + xlnx - x = \bar{c}$ $\implies -20 + ln1 - 1 = -20 - 1 = \bar{c} \implies \bar{c} = -21$

Logo, temos como solução $-(x+1)y + xlnx - x = -21$

Questão 3

(1) Dada a equação $\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$, tomamos a mudança de variável $u = Ax + By + C$.

Observo que $u' = A + By' \implies y' = \frac{u'-A}{B}$

Daí, usando a equação inicial, temos que $f(Ax + By + C) = \frac{u'-A}{B} \implies f(u) = \frac{u'-A}{B} \implies u' = f(u)B + A \implies u'\frac{1}{f(u)B+A} = 1$, que é uma equação de variáveis separadas.

(2) $y' = (-2x + y)^2 - 7, y(0) = 0$

Pelo item anterior, faço $u = -2x + y$ e $f(u) = u^2 - 7$, obtendo $u'\frac{1}{f(u)-2} = 1 \implies u'\frac{1}{u^2-9} = 1 \implies \int \frac{1}{u^2-9}du = \int dx$

Integrando, obtemos $-\frac{1}{6}(ln|\frac{u}{3} + 1| - ln|\frac{u}{3} - 1|) = x + c \implies -\frac{1}{6}(ln|\frac{-2x+y}{3} + 1| - ln|\frac{-2x+y}{3} - 1|) = x + c$

Daí, como $y(0) = 0$, temos $-\frac{1}{6}(ln|\frac{-2x+y}{3} + 1| - ln|\frac{-2x+y}{3} - 1|) = x + c \implies -\frac{1}{6}(ln|\frac{0}{3} + 1| - ln|\frac{0}{3} - 1|) = 0 + c \implies c = 0$

Logo, temos como solução $-\frac{1}{6}(ln|\frac{-2x+y}{3} + 1| - ln|\frac{-2x+y}{3} - 1|) = x$

Questão 4

(1) $y' = |y|^{\frac{1}{2}}, y(0) = 0$

Observe que $y(x) = 0$ e $y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, x \geq 0 \\ \frac{-x^2}{4}, x < 0 \end{cases}$ são soluções da E.D.O.

(2) Isso não contradiz o Teorema de Existência e Unicidade pois as hipóteses não estão satisfeitas. A função $f(x,y) = |y|^{\frac{1}{2}}$ é derivável em relação à variável y na origem, mas esta não é contínua, pois $\frac{\partial}{\partial y}|y|^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{2|y|^{\frac{3}{2}}}$.