Aula 6. Processo de Poisson. Aplicações. (Exercícios).

Anatoli Iambartsev
IME-USP

Exemplo 5.25 [Ross] Fluxo de saídas de um servidor infinito.

A chegada de clientes forma um processo de Poisson com taxa λ. Existe um número infinito de atendentes com distribuição acumulada G para o tempo de atendimento. Na teoria das filas, esse modelo denota-se como $M/G/\infty$. Prove que para esse sistema as saídas de clientes depois de atendimento forma processo de Poisson não homogêneo com taxa $\lambda(t) = \lambda G(t)$.

Primeiro, observe que o fluxo de saídas é processo com incrementos independentes. Para isso só falta considerar intervalos de tempo distintos $O_1, O_2, \ldots, O_k$ e as chegadas de clientes vamos marcar do tipo i, se depois de atendimento cliente vai sair durante intervalo O_i, $i = 1, \ldots, k$. Logo percebemos que número de eventos em O_i são independentes.

Exemplo 5.25 [Ross] Fluxo de saídas de um servidor infinito.

Provamos agora que a taxa de saída é $\lambda(t) = \lambda G(t)$. Realmente, usando esquema "infinitesimal", consideremos a probabilidade de que um cliente sai em intervalo $[t, t+h]$. Se um cliente chega em instante s, então a probabilidade que ele vai sair em $[t, t+h]$ é $G(t+h-s) - G(s)$, assim, o número de saídas em $[t, t+h]$ é variável aleatória com a distribuição de Poisson com média

$$\lambda \int_0^{t+h} (G(t+h-s) - G(t-s))ds = \lambda \int_0^{t+h} \Big(G'(t+h-s)h + o(h)\Big)\, ds$$
$$= \lambda h \int_0^{t+h} G'(y)dy + o(h) = \lambda G(t)h + o(h)$$

$$\mathbb{P}(1 \text{ uma saída em } [t, t+h]) = \lambda G(t)he^{-\lambda G(t)h} + o(h) = \lambda G(t)h + o(h)$$
$$\mathbb{P}(\geq 2 \text{ saídas em } [t, t+h]) = o(h)$$

Processo de Poisson Misto. (Ross Cap. 5.4.3.)

Principalmente na inferência Bayesiana os parâmetros de alguma distribuição são consideradas como variáveis aleatórias. Podemos considerar a taxa do processo de Poisson como uma variável aleatória L, com a densidade g, e, dado que $L = \lambda$, um processo de contagem se transforma em processo de Poisson com a taxa λ. Esse processo de contagem chama-se *processo de Poisson misto*. A distribuição de incrementos é dada pela seguinte formula

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(s+t) - N(s) = n) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(N(s+t) - N(s) = n \mid L = \lambda) g(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} g(\lambda) d\lambda.\end{aligned}$$

Percebemos que o processo tem incrementos estacionários. Mas, em geral, não podemos ter incrementos independentes: porque a informação que em um intervalo temos k eventos vai falar algo sobre os valores de λ o que vai (pode) influenciar em distribuição em número de eventos em outro intervalo. Por isso, em geral, processo de Poisson misto não é um processo de Poisson.

Processo de Poisson Misto. (Ross Cap. 5.4.3.). Exemplo 5.29. A distribuição de incrementos é

$$\mathbb{P}(N(s+t)-N(s)=n)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}g(\lambda)d\lambda.$$

Consideremos caso g é densidade gamma $\gamma(m,\theta)$:

$$g(\lambda)=\theta e^{-\theta\lambda}\frac{(\theta\lambda)^{m-1}}{(m-1)!},\quad \lambda>0.$$

Neste caso

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(t)=n)&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\theta e^{-\theta\lambda}\frac{(\theta\lambda)^{m-1}}{(m-1)!}d\lambda\\ &=\frac{t^n\theta^m}{n!(m-1)!}\int_0^\infty e^{-(t+\theta)\lambda}\lambda^{n+m-1}d\lambda\\ &=\frac{t^n\theta^m(n+m-1)!}{n!(m-1)!(t+\theta)^{n+m}}\int_0^\infty (t+\theta)e^{-(t+\theta)\lambda}\frac{((t+\theta)\lambda)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}d\lambda\end{aligned}$$

Processo de Poisson Misto. (Ross Cap. 5.4.3.). Exemplo 5.29.

Neste caso

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(t)=n) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\theta e^{-\theta\lambda}\frac{(\theta\lambda)^{m-1}}{(m-1)!}d\lambda \\
&= \frac{t^n\theta^m}{n!(m-1)!}\int_0^\infty e^{-(t+\theta)\lambda}\lambda^{n+m-1}d\lambda \\
&= \frac{t^n\theta^m(n+m-1)!}{n!(m-1)!(t+\theta)^{n+m}}\int_0^\infty (t+\theta)e^{-(t+\theta)\lambda}\frac{((t+\theta)\lambda)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}d\lambda \\
&= \binom{n+m-1}{n}\left(\frac{\theta}{t+\theta}\right)^m\left(\frac{t}{t+\theta}\right)^n
\end{aligned}
$$

Processo de Poisson Misto. (Ross Cap. 5.4.3.). Exemplo 5.30.

Uma seguradora suponha que cada um dos seus clientes tem um valor de classificação λ e de acordo com esse valor o número de sinistros desse cliente segue um processo de Poisson com a taxa λ (sinistros por um ano). Seguradora também suponha que trabalha com uma população onde a classificação tem distribuição uniforme em $(0, 1)$. Dado que um segurado fez n sinistros em seus primeiros t anos, qual é a distribuição condicional do tempo até o próximo sinistro do segurado?

Processo de Poisson Misto. (Ross Cap. 5.4.3.). Exemplo 5.30.

Seja T o instante de próximo sinistro, e seja $f_{L|N(t)}(\lambda \mid n)$ densidade condicional de L dado n sinistros. Assim

$$\mathbb{P}(T > x \mid N(t) = n) =$$
$$= \int_0^\infty \mathbb{P}(T > x \mid N(t) = n \mid L = \lambda, N(t) = n) f_{L|N(t)}(\lambda \mid n) d\lambda$$
$$= \int_0^\infty e^{-\lambda x} f_{L|N(t)}(\lambda \mid n) d\lambda.$$

Para continuar precisamos achar densidade condicional. Para isso consideremos a distribuição cumulativa condicional.

Processo de Poisson Misto. (Ross Cap. 5.4.3.). Exemplo 5.30.

Achamos em caso geral, quando a distribuição de L é dada pela densidade $g(\cdot)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L \le x \mid N(t) = n) &= \frac{\mathbb{P}(L \le x, N(t) = n)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\
&= \frac{\int_0^\infty \mathbb{P}(L \le x, N(t) = n \mid L = \lambda) g(\lambda) d\lambda}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\
&= \frac{\int_0^x \mathbb{P}(N(t) = n \mid L = \lambda) g(\lambda) d\lambda}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\
&= \frac{\int_0^x e^{-\lambda t} (\lambda t)^n g(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty e^{-\lambda t} (\lambda t)^n g(\lambda) d\lambda} \\
f_{L|N(t)}(\lambda \mid n) &= \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n g(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t} (\lambda t)^n g(\lambda) d\lambda}, \lambda \ge 0.
\end{aligned}$$

Voltando para seguradora ...

Processo de Poisson Misto. (Ross Cap. 5.4.3.). Exemplo 5.30.

$$\mathbb{P}(T > x \mid N(t) = n) =$$

$$= \int_0^\infty \mathbb{P}(T > x \mid N(t) = n \mid L = \lambda, N(t) = n) f_{L|N(t)}(\lambda \mid n) d\lambda$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda x} f_{L|N(t)}(\lambda \mid n) d\lambda$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n g(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t}(\lambda t)^n g(\lambda) d\lambda} d\lambda = \int_0^1 e^{-\lambda x} \frac{e^{-\lambda t}\lambda^n}{\int_0^1 e^{-\lambda t}\lambda^n d\lambda} d\lambda$$

$$= \frac{\int_0^1 e^{-\lambda x} e^{-\lambda t}\lambda^n d\lambda}{\int_0^1 e^{-\lambda t}\lambda^n d\lambda}$$

Processo de Poisson composto. Uma representação alternativa.

Supondo que Y_i tem valores α_j finitos ou contáveis, $j \geq 1$, e

$$\mathbb{P}(Y_1 = \alpha_j) = p_j, \quad \sum_j p_j = 1,$$

processo de Poisson composto pode ser representado como uma soma dos processos de Poisson.

Realmente, imagine que processo de Poisson composto que em cada ocorrência de evento, o evento pode ser classificado de acordo com a contribuição de incremento: evento to tipo i se $Y = \alpha_i$. Seja $N_j(\cdot)$ processo de Poisson de respectivos eventos do tipo j. Então

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i = \sum_j \alpha_j N_j(t)$$

References:

[Ross] S.Ross. *Introduction to Probability Models.* 9th edition, Academic Press, 2007.