

## EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 2ª ORDEM LINEARES2

### 1. COEFICIENTES NÃO NECESSARIAMENTE CONSTANTES

**1.1. Equações homogêneas, uso de uma solução para encontrar outra.** No caso das equações com coeficientes não necessariamente constantes e homogêneas.

$$(1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

sendo  $p, q$  funções reais e contínuas definidas em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , não dispomos de um método geral para determinar as soluções. Entretanto, se *uma solução*  $y_1$  for conhecida, podemos usar o *método da variação das constantes* para determinar *outra solução* na forma  $y_2 = vy_1$ .

Calculando, obtemos:

$$\begin{aligned} y_2 &= vy_1 \\ y_2' &= v'y_1 + vy_1' \\ y_2'' &= v'' + 2v'y_1' + vy_1'' \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial e lembrando que  $y_1$  é solução, obtemos:

$$\begin{aligned}
y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' + (y_1'' + py_1' + qy_1)v &= 0 \Leftrightarrow \\
y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' &= 0 \Leftrightarrow \\
\frac{v''}{v'} &= -2\frac{y_1'}{y_1} - p \Leftrightarrow \\
\frac{d}{dx} \log |v'| &= \frac{d}{dx} (-2 \log |y_1|) - p \Leftrightarrow \\
\log |v'| &= \log \frac{1}{y_1^2} - \int p \Leftrightarrow \\
|v'| &= \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p}.
\end{aligned}$$

Precisamos de apenas uma solução, portanto basta tomar  $v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p}$ , sendo  $\int p$  uma primitiva qualquer de  $p$ .

**Exemplo 1.**  $x^2 y'' + xy' - y = 0$ .

É fácil verificar que  $y = x$  é solução.

Outra solução é dada então por  $y = v(x)x$ , sendo

$$v' = \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x^2} e^{-\log |x| + C} = C \frac{1}{|x| x^2}, \text{ e podemos escolher } v' = \frac{1}{x^3}, v = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \text{ obtendo uma segunda solução:}$$

$$y_2 = v \cdot x = \frac{1}{x^2} \cdot x = \frac{1}{x}.$$

[

A solução geral da equação é dada por :

$$y(x) = C_1 x + C_2 \cdot \frac{1}{x}.$$

**1.2. Equação não homogênea, método da variação dos parâmetros.** Consideremos agora a equação não homogênea.

$$(2) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),$$

Supondo conhecidas duas soluções L.I.  $y_1$  e  $y_2$  da equação homogênea associada (1) podemos, em princípio encontrar uma solução particular da equação (2) da forma:

$$y_p = v_1(x) \cdot y_1 + v_2(x) \cdot y_2$$

. Derivando, obtemos

$$y'_p = v'_1 y_1 + v_1 y'_1 + v'_2 \cdot y_2 + v_2 \cdot y'_2.$$

Agora, observando que precisamos encontrar apenas um par de funções  $v_1, v_2$ , adicionamos uma condição suplementar para evitar derivadas segundas em  $v_1$  e  $v_2$ :

$$(3) \quad v'_1 y_1 + v'_2 y_2 = 0,$$

de onde:

$$y'_p = v_1 y'_1 + v_2 \cdot y'_2.$$

Derivando novamente:

$$y''_p = v'_1 y'_1 + v_1 y''_1 + v'_2 \cdot y'_2 + v_2 \cdot y''_2.$$

Da equação (2) obtemos, lembrando que  $y_1$  e  $y_2$  são soluções:

$$(4) \quad y''_p + p(x)y'_p + q(x)y_p = v'_1 y'_1 + v'_2 \cdot y'_2 = g(x).$$

De (3) e (4), temos o sistema de equações para  $v'_1$  e  $v'_2$ .

$$\begin{cases} y_1 v'_1 + y_2 v'_2 = 0 \\ y'_1 v'_1 + y'_2 v'_2 = g(x). \end{cases}$$

Ou, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix}$$

Pela regra de Cramer:

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g & y_2' \end{vmatrix}}{W} = \frac{-gy_2}{W}$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_2 & 0 \\ y_2' & g \end{vmatrix}}{W} = \frac{gy_1}{W},$$

sendo

$$W = W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

o Wronskiano do par de soluções  $y_1, y_2$ .

**Exemplo 2.** *Encontrar uma solução particular da equação :*  
 $y'' - 2y' + y = 2x$ .

Este o mesmo problema resolvido anteriormente usando exemplo do método dos coeficientes a determinar. Como vimos lá, um par de soluções da equação homogênea associada é:

$$y_1 = e^x \text{ e } y_2 = xe^x.$$

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ (e^x)' & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x}.$$

Portanto, obtemos:

$$v_1' = \frac{-2x \cdot xe^x}{e^{2x}} = -2x^2e^{-x},$$

$$v_2' = \frac{2x \cdot e^x}{e^{2x}} = 2xe^{-x}.$$

Integrando (por partes),

$$v_1 = 2x^2e^{-x} + 4xe^{-x} + 4e^{-x},$$

$$v_2 = -2xe^{-x} - 2e^{-x}.$$

Portanto

$$y_p = (2x^2e^{-x} + 4xe^{-x} + 4e^{-x})e^x - (2xe^{-x} + 2e^{-x})xe^x = 2x + 4.$$

O método pode ser estendido para equações de ordem maior.

$$(5) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' = g(x).$$

Procedendo como antes, se  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ , são  $n$  soluções L.I da equação homogênea associada, obtemos um sistema do tipo:

$$\begin{cases} y_1 v_1' + y_2 v_2' + \cdots + y_{n-1} v_{n-1}' + y_n v_n' & = 0 \\ y_1' v_1' + y_2' v_2' + \cdots + y_{n-1}' v_{n-1}' + y_n' v_n' & = 0 \\ \vdots & \\ y_1^{(n-2)} v_1' + y_2^{(n-2)} v_2' + \cdots + y_{n-1}^{(n-2)} v_{n-1}' + y_n^{(n-2)} v_n' & = 0 \\ y_1^{(n-1)} v_1' + y_2^{(n-1)} v_2' + \cdots + y_{n-1}^{(n-1)} v_{n-1}' + y_n^{(n-1)} v_n' & = g(x) \end{cases}$$

para as  $n$  funções  $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$

**Exemplo 3.** *Encontrar uma solução particular da equação :*  
 $y''' + y' = \sec x$ .