

# *Estabilidade de Sistemas Dinâmicos*

- *Introdução : Conceitos*
- *Sistemas de Primeira Ordem*
  - *Estabilidade*
- *Sistemas de Segunda Ordem*
  - *Estabilidade*
- *Sistemas de Ordem Superior*
  - *Estabilidade*

# Conceitos de Estabilidade

Há vários conceitos de estabilidade. Aqui destacamos dois. Um por sua importância e largo espectro de aplicação inclusive em Controle e sistemas não lineares que é a Estabilidade segundo Lyapunov, e outro, que usaremos na disciplina, que é o conceito de Estabilidade BIBO, interessante em sistemas lineares e bastante fácil de entender.

A Estabilidade segundo Lyapunov (1857-1917) é apenas ilustrada aqui. Aos interessados recomendamos uma pesquisa em livros e na internet, onde há material farto.

# Estabilidade Segundo Lyapunov.

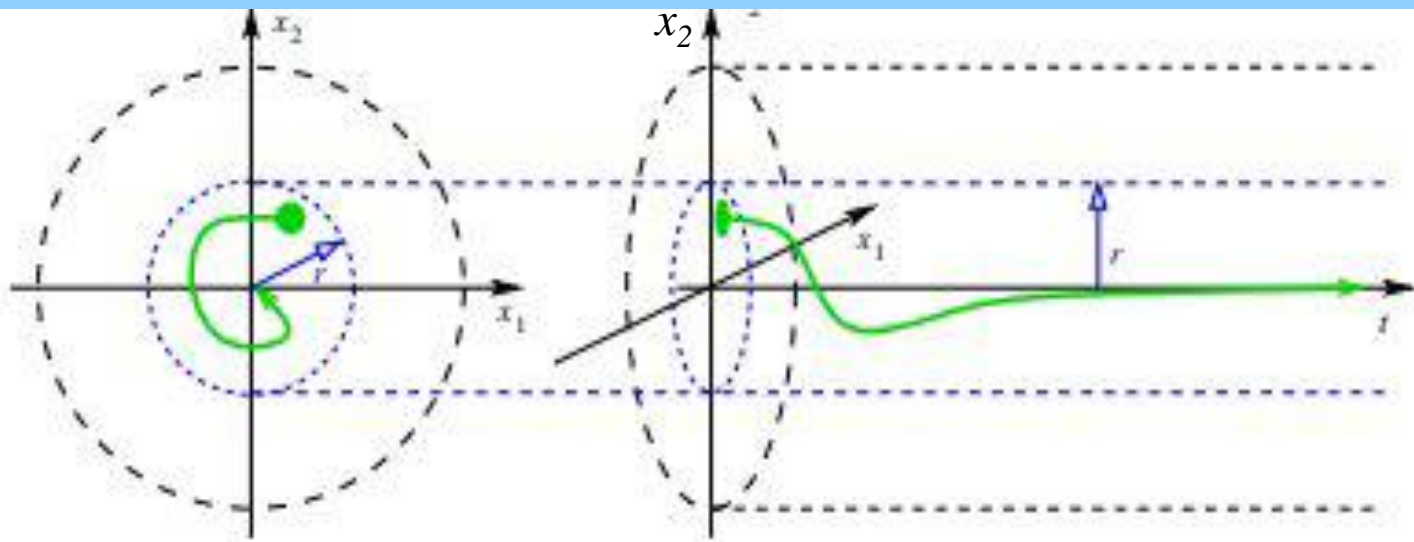
Ilustraremos apenas o conceito de estabilidade para um Ponto Equilíbrio (P.E.).

P.E. Estável: dado  $\epsilon > 0$  qualquer,  $\exists \delta(\epsilon, t_0) > 0$ , tal que:

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0$$

O P.E. é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável quando:

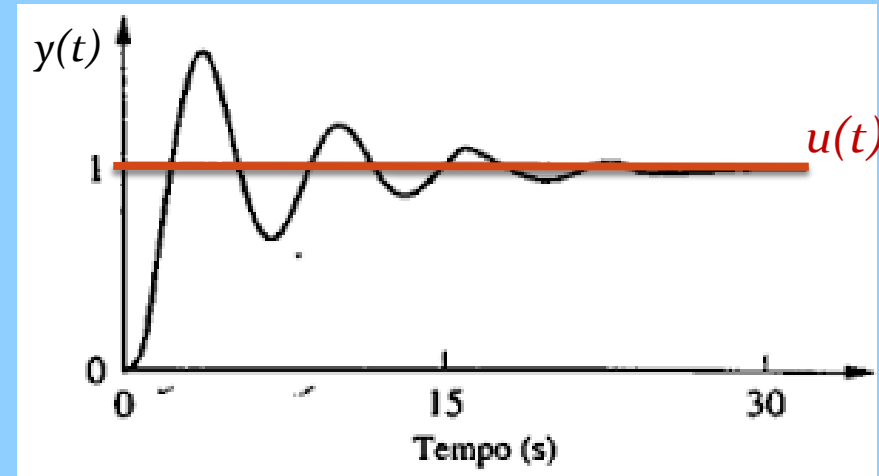
$\exists r(t_0) > 0$ , tal que  $\|x(t_0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$



# Estabilidade BIBO

Estabilidade BIBO ('Bounded Input Bounded Output'), ou Entrada Limitada Saída Limitada:

Um SLIT tem estabilidade (assintótica) BIBO, quando a toda entrada limitada corresponder uma saída limitada (assintótica).



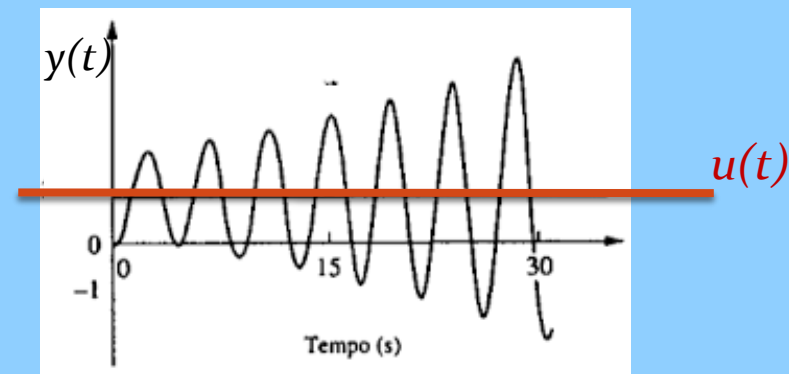
$t$

# Instabilidade BIBO

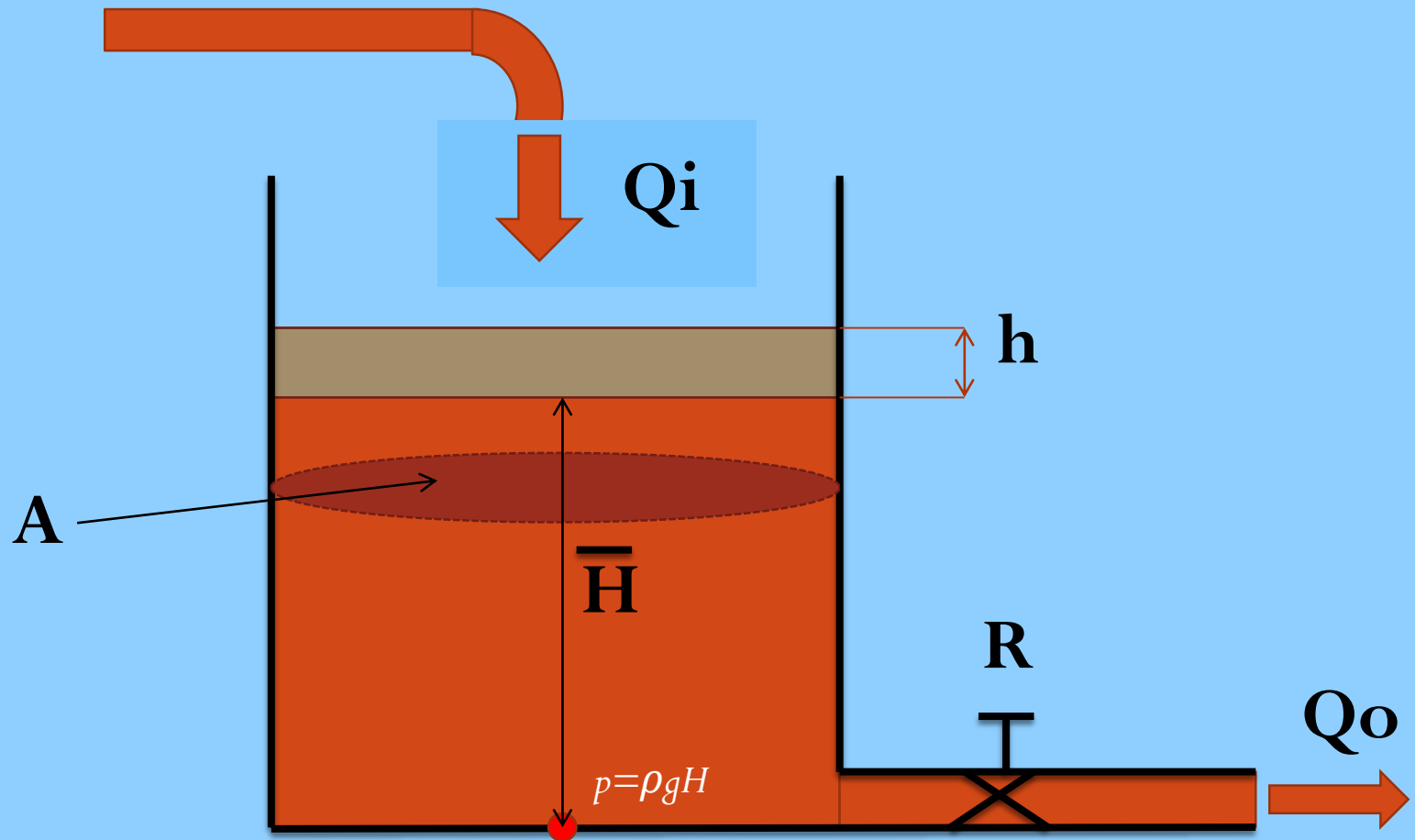
Um sistema será instável se a uma entrada limitada (impulso, pulso, degrau...) ele responder de forma ilimitada, isto é a resposta crescer ilimitadamente, o que pode levar o sistema a ser destruído:

Por exemplo, um avião cair, uma usina atômica explodir, um carro capotar, um navio emborcar, um motor ou gerador queimar, um elemento químico desintegrar-se, etc.

Sistemas instáveis tem pouco interesse na prática. Eles podem ter alguma utilidade quando controlados ou estabilizados, isto é, quando puderem ser estabilizados, por exemplo, um avião caça.



# Sistema de Primeira ordem



## Função de transferência

$$\dot{h} + \frac{h}{RA} = \frac{q}{A}$$



Transf. de Laplace com condições iniciais nulas :

$$\left( s + \frac{1}{RA} \right) H(s) = \frac{Q(s)}{A}$$

$$\frac{\mathcal{L}(\text{saída})}{\mathcal{L}(\text{entrada})} = \frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{1}{\left( As + \frac{1}{R} \right)} = \frac{R}{ARs + 1}$$

entrada degrau unit.:  $1/s$

Vazão em RP?  $\rightarrow$  TVF

$$H = \frac{R}{1 + \tau s} \frac{1}{s}$$

$$h_{(\infty)} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R}{1 + \tau s} \frac{1}{s} = R$$

$$[AR] = \text{cte de tempo} \Rightarrow AR = \tau$$

$$\frac{H}{Q} = G(s) = \frac{R}{\tau s + 1}$$

$\Rightarrow$  se  $\tau$  é grande  $\Rightarrow$  sistema lento!

Nenhum zero e um polo :  $p_1 = -1/\tau$

## Função de transferência



$$\frac{\mathcal{L}(\text{saída})}{\mathcal{L}(\text{entrada})} = \frac{H}{Q_i} = \frac{R}{\tau s + 1}$$

$$H = RQ_o$$

entrada degrau unit.:  $1/s$

Vazão em RP?  $\rightarrow$  TVF

$$Q_o = \frac{1}{1 + \tau s} \frac{1}{s}$$

$$q_o(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} q_o(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \tau s} \frac{1}{s} = 1$$

$$\frac{RQ_o}{Q_i} = \frac{R}{\tau s + 1}$$

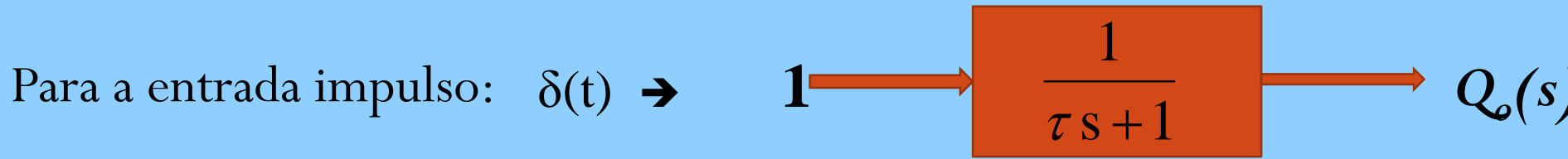
$$\frac{Q_o}{Q_i} = G1 = \frac{1}{ARs + 1} = \frac{1}{\tau s + 1}$$



polo :  $p1 = -1/\tau$



# Resposta de Sistema de Primeira Ordem

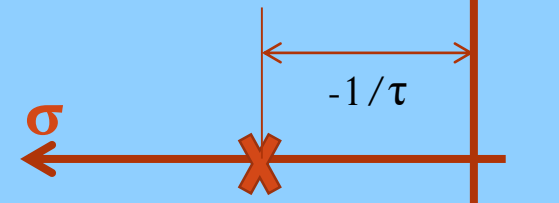


$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = G(s) \Rightarrow Q_o(s) = G(s) \cdot 1 = G(s)$$

$$\therefore q_o(t) = \mathcal{L}^{-1}(Q_o(s)) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\tau s + 1} = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}\right)$$

Tabela de Transformadas:  $q_o(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

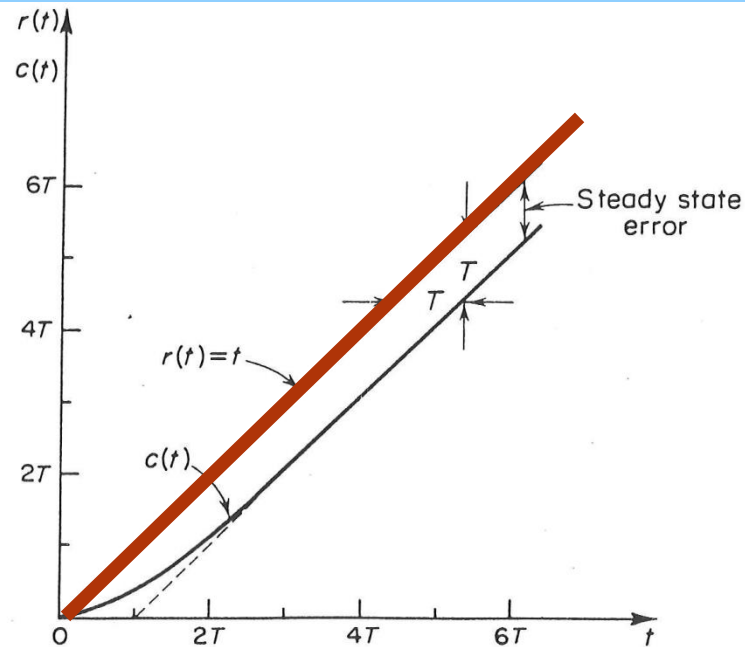
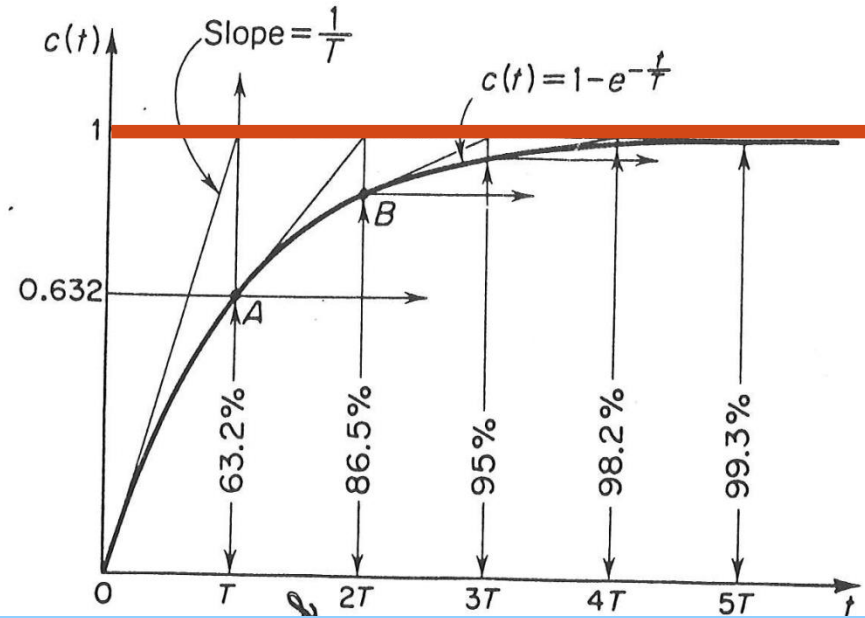
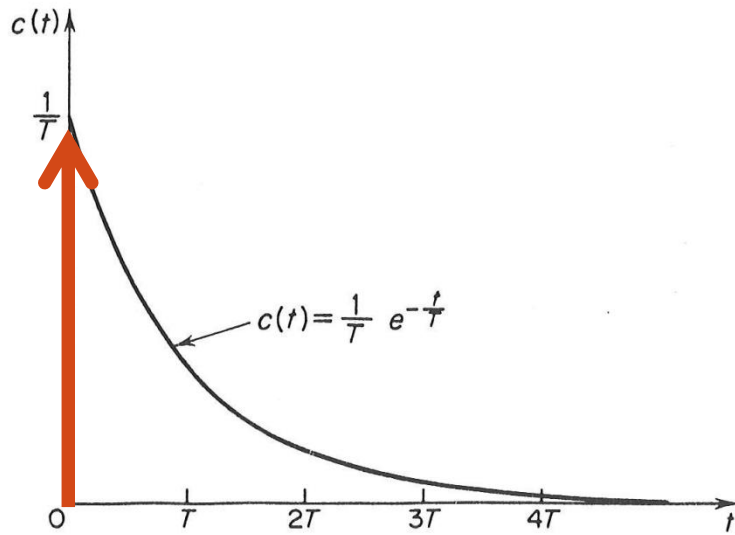
Para a entrada degrau:  $Q_o(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$



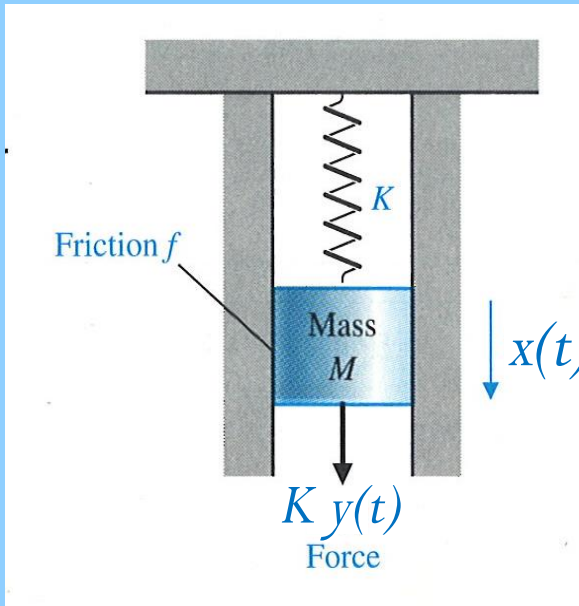
$$q_o(t) = \int_0^T \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

6	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
7	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
11	$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12	$\text{senh } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
13	$\text{cosh } \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
14	$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a} (be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab} \left[ 1 + \frac{1}{a-b} (be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$

# Resposta de Sistema de Primeira Ordem



# Sistemas de Segunda Ordem



$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = Ky$$

$$\therefore \ddot{x} + \frac{B}{M}\dot{x} + \frac{K}{M}x = \frac{K}{M}y$$

Determinando a FT:

$$\left(s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{K}{M}\right)X(s) = \frac{K}{M}Y(s)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{K/M}{\left(s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{K}{M}\right)}$$

$$\text{Equação Característica : } s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{K}{M} = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-\frac{B}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{M}\right)^2 - 4\frac{K}{M}}}{2}$$

# Sistemas de Segunda Ordem

$$\text{Seja: } \omega_n^2 = \frac{K}{M} = \left(\frac{B_c}{2M}\right)^2 \Rightarrow B_c = 2M\omega_n$$

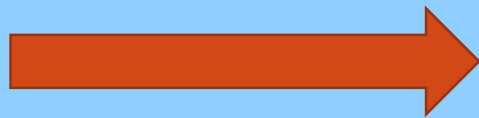
$$\frac{B}{B_c} = \zeta$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\text{Equação Característica: } s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$\text{polos: } s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

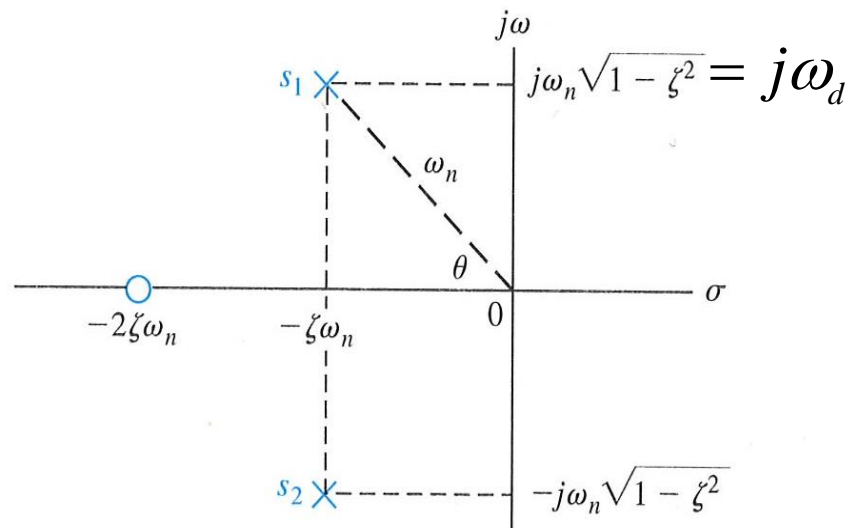
Se  $0 < \zeta < 1,0$



Frequência natural amortecida:

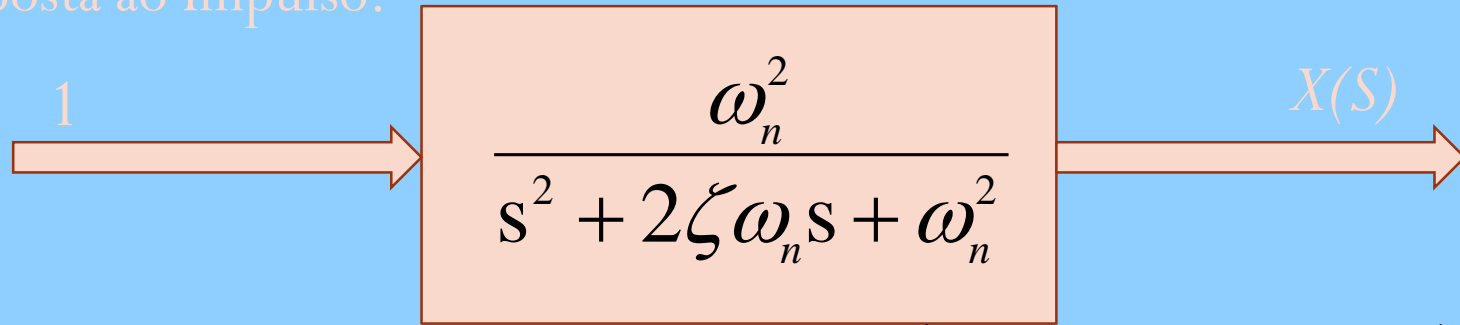
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

2 polos complexos conjugados



# Sistemas de Segunda Ordem

Resposta ao Impulso:



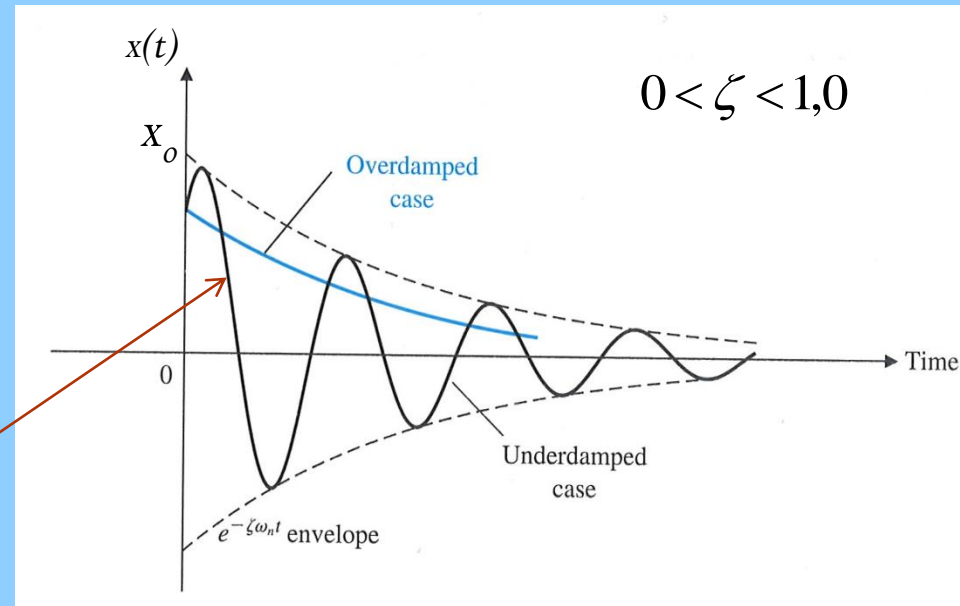
$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(s)) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right)$$

Tabela de Transformadas:

$$x(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}\omega_d t$$

Amortecimento subcrítico:

14 2 polos complexos conjugados



20	$e^{-at} \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
21	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
22	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$
23	$-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	$\frac{s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$
24	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$
25	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
26	$\omega t - \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)}$
27	$\operatorname{sen} \omega t - \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$
28	$\frac{1}{2\omega} t \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
29	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

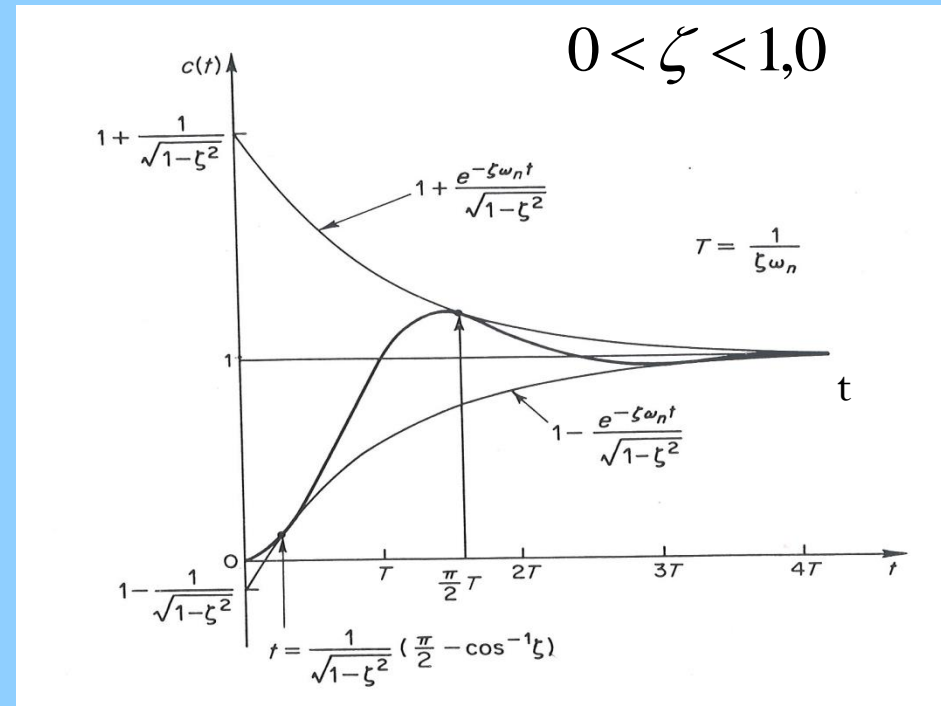
- Resposta ao degrau:

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}(X_1(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} G(s)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \left(\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right)\right]$$

*Tabela de Transformadas :*

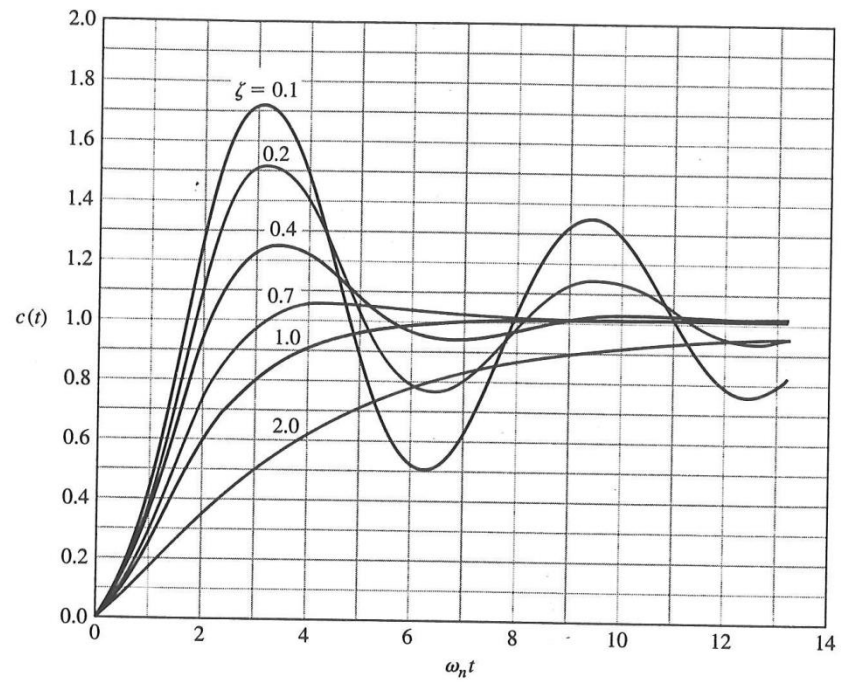
$$x_1(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \theta)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

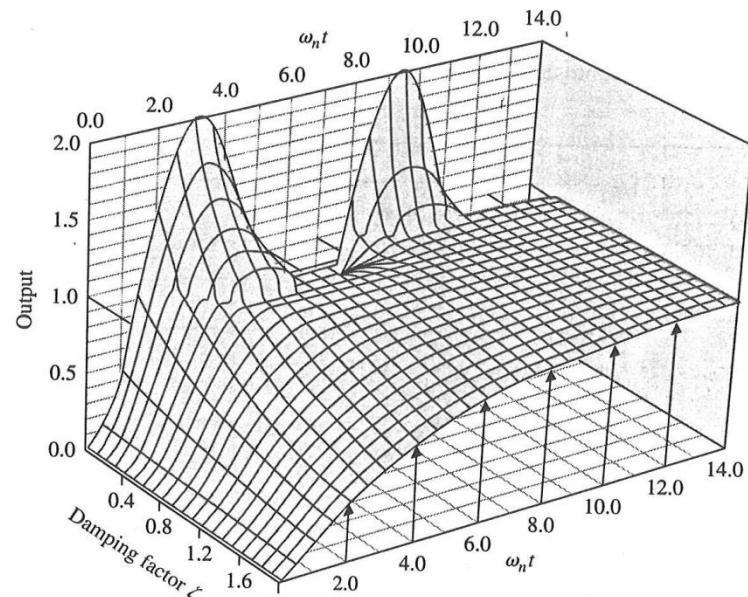




# Resposta ao degrau:



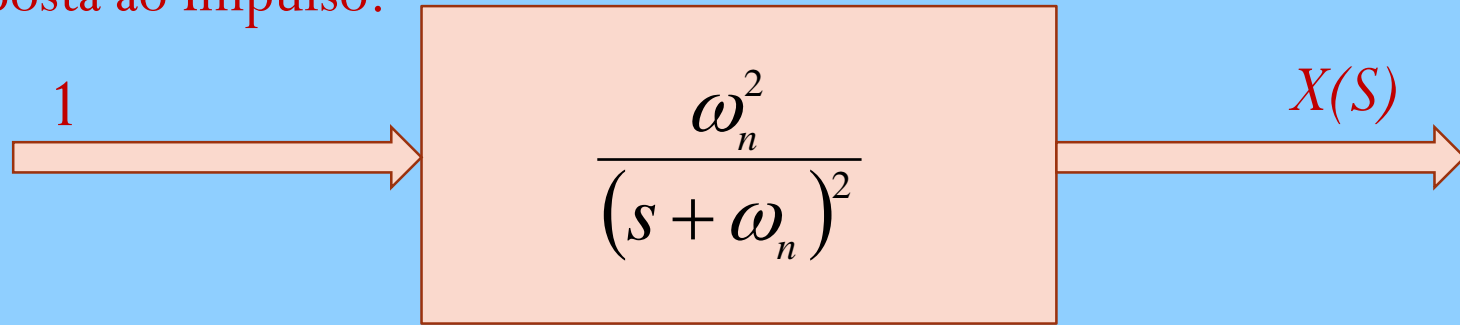
(a)





Se  $\zeta = 1 \rightarrow$  Amortecimento crítico. Dois polos reais e iguais:  $s_1 = s_2 = -\omega_n$

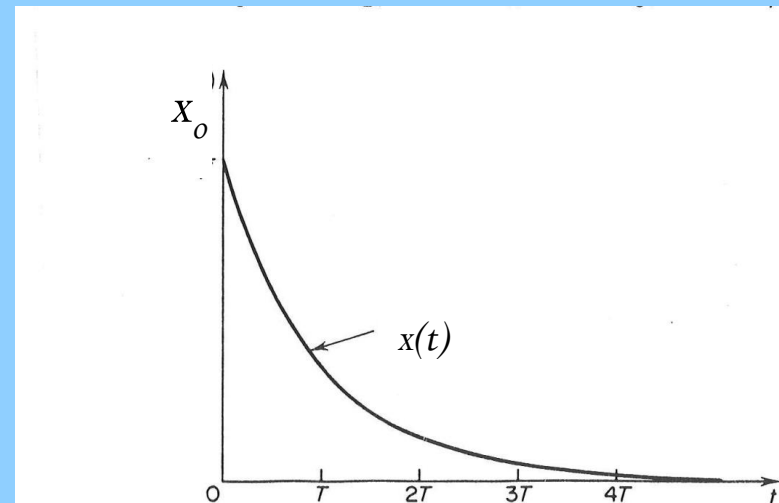
Resposta ao Impulso:



Tabelas de Transformadas de Laplace:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(s)) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}\right)$$

$$x(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \Rightarrow t \rightarrow \infty \Rightarrow x(t) = 0$$



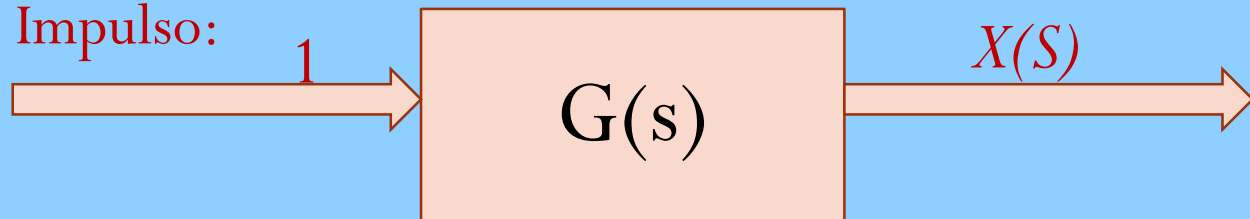
Se  $\zeta > 1 \rightarrow$  Amortecimento supercrítico. Dois polos reais diferentes

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

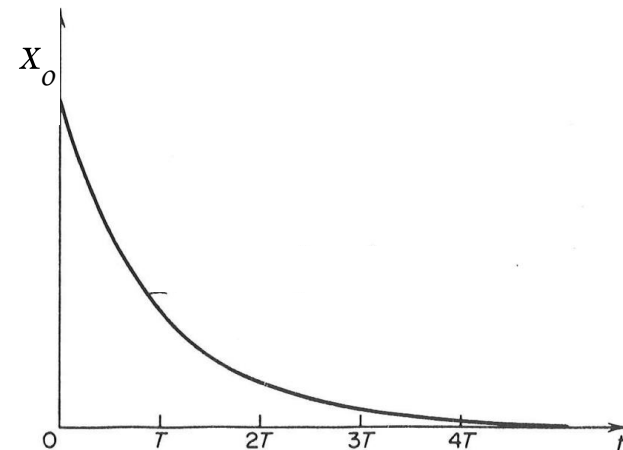
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + a)(s + b)}$$

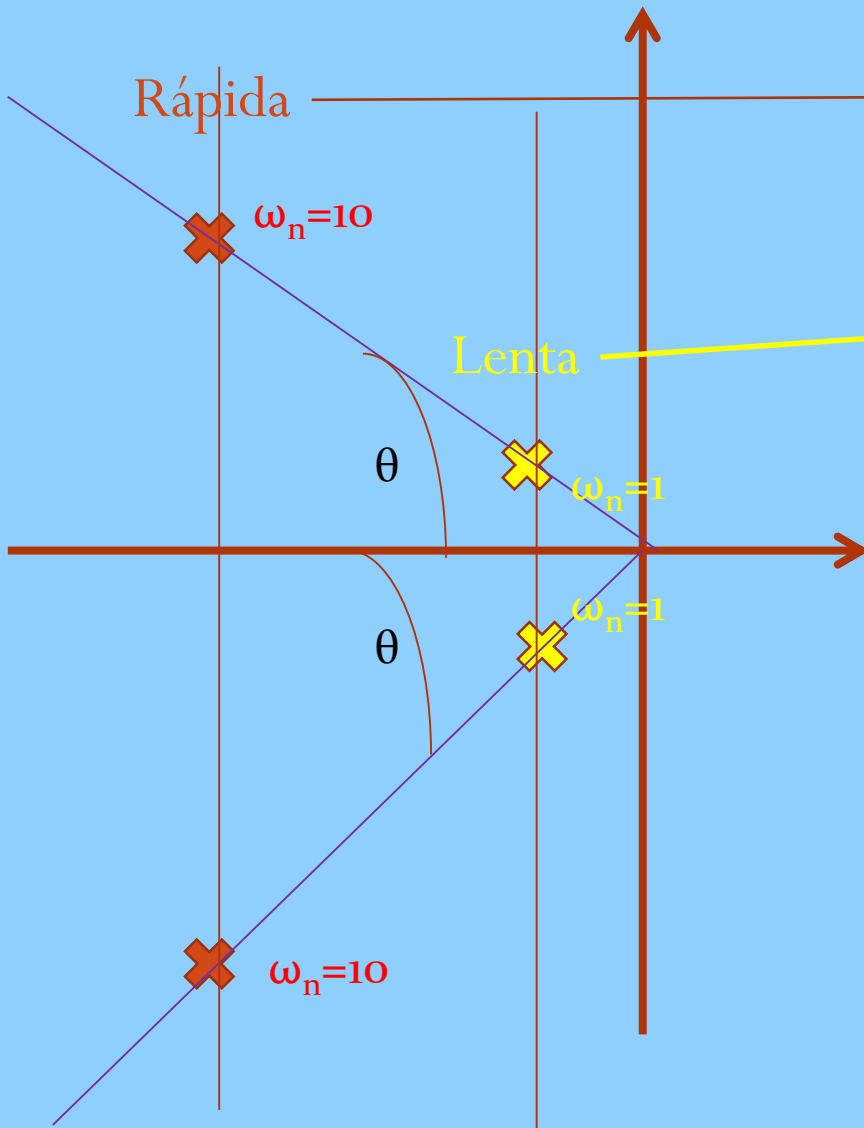
Resposta ao Impulso:



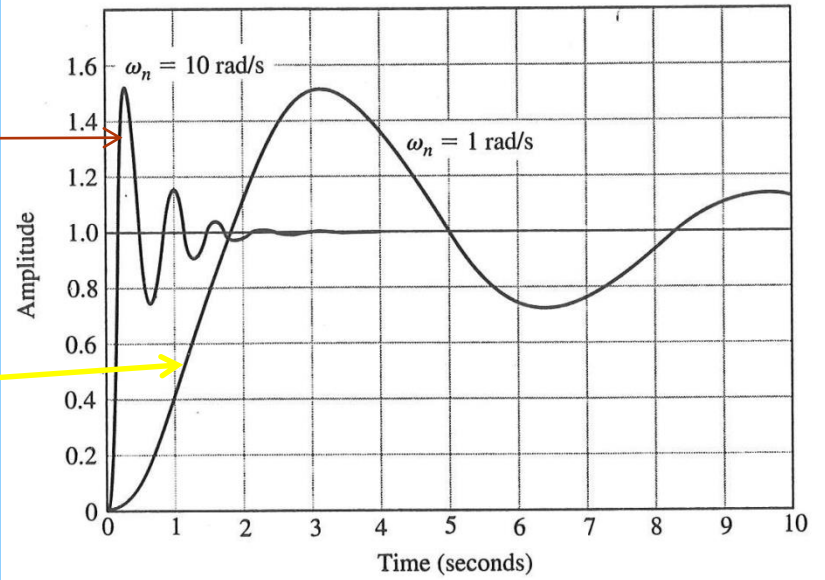
Tabelas de Transformadas de Laplace:

$$x(t) = \frac{\omega_n^2}{(b - a)} (e^{-at} - e^{-bt})$$

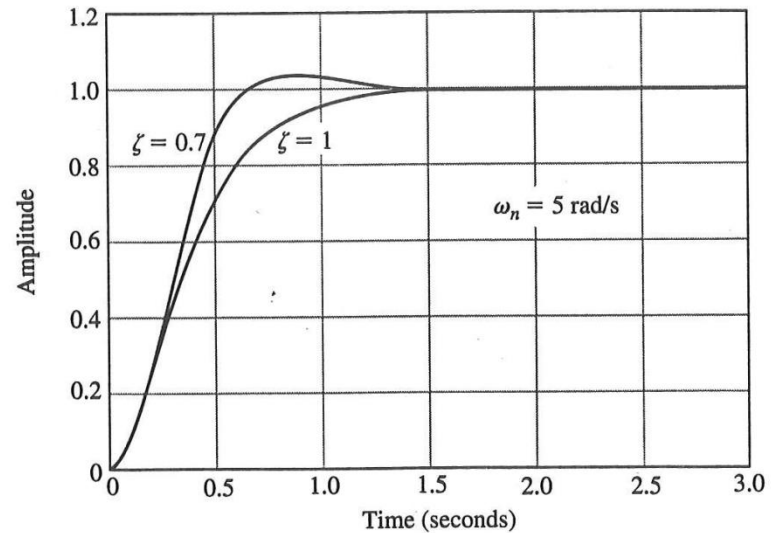




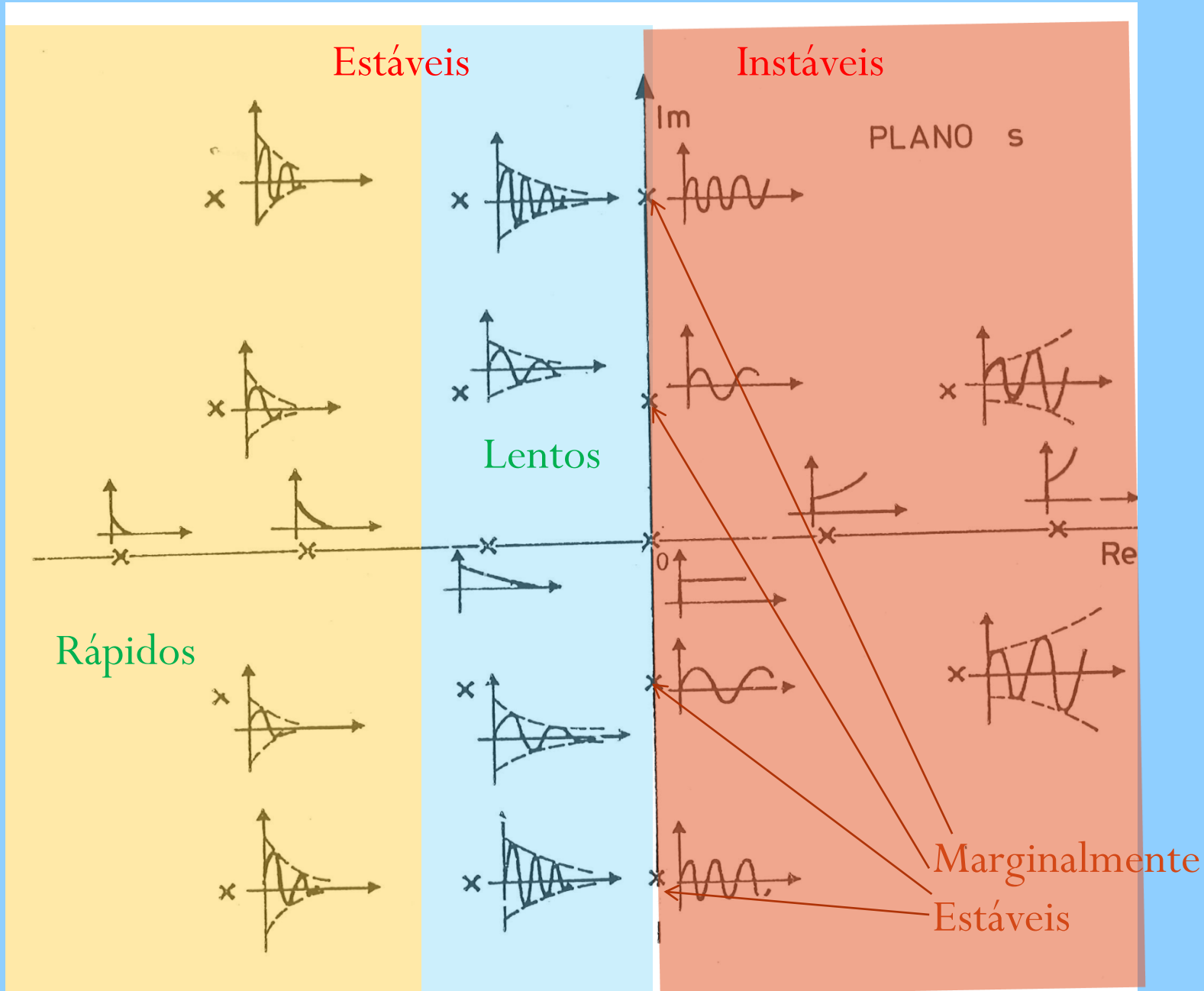
$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$



### The Performance of Feedback Control Systems

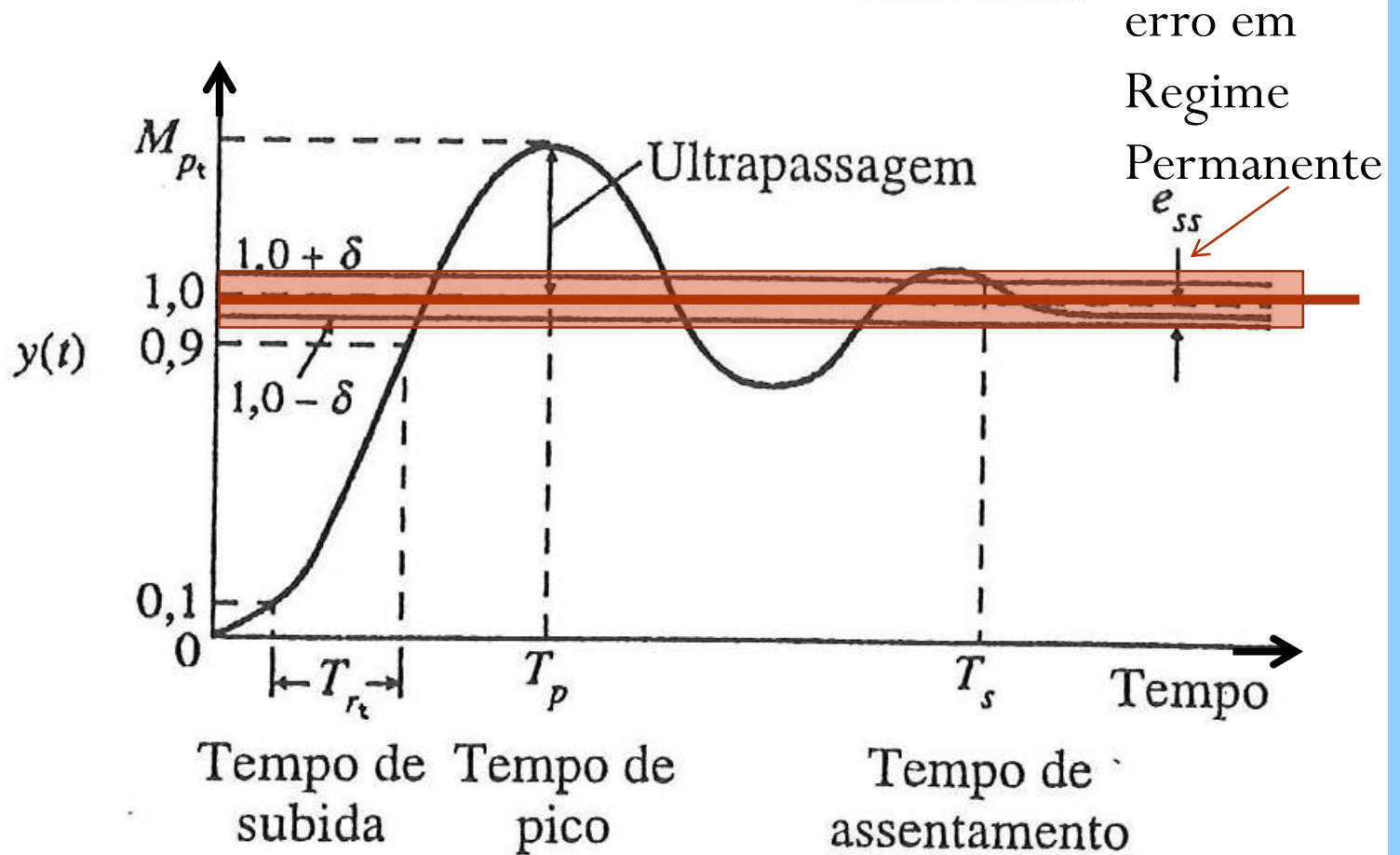


# Posição dos polos e respostas: impulso

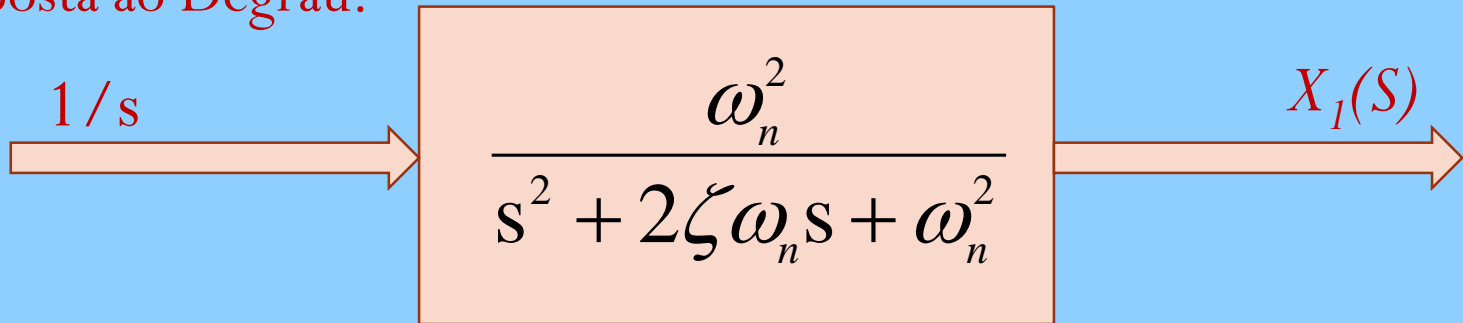


# Medidas de desempenho de Sistemas de Segunda Ordem

## RESPOSTA AO DEGRAU UNITÁRIO



Resposta ao Degrau:



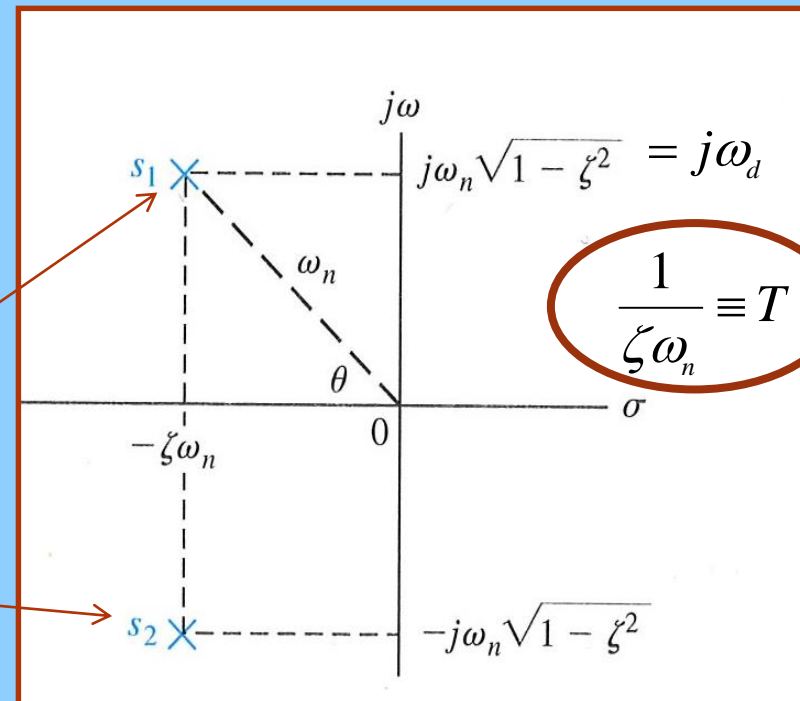
$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}(X_1(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} G(s)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \left(\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right)\right]$$

Tabela de Transformadas:

$$x_1(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}(\omega_d t + \theta)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$





# Medidas de desempenho de Sistemas de Segunda Ordem

## 1. Rapidez de Resposta

- a. **Tempo de Subida ( $T_r$ )** : tempo para ir de 0-100% (5-95%) do valor final em sistemas subamortecidos ou 10-90% em sistemas supercríticos.
- b. **Tempo de Pico ( $T_p$ )** (“tempo de overshoot”): tempo para alcançar o primeiro pico de resposta.
- c. **Tempo de atraso**: tempo para ir de 0-50% do valor final.

## 2. Similaridade da Resposta com a Entrada

- a. **Sobressinal** (“overshoot”) ou **Pico Máximo ( $M_p$ )** : valor máximo da resposta.
- b. **Tempo de acomodação ( $T_s$ )**: tempo para que a resposta fique dentro de uma faixa (2% ou 5%) ao redor do valor final.

1) Tempo de subida:  $T_s$  (0-100%):  $v_f = 1,0$  (degrau unitário)

$$\text{sen}(\omega_d t + \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \omega_d t + \theta = n\pi \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 1 \Rightarrow T_s = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$$

2) Tempo de pico:  $T_p$

$$\text{ponto de máximo} : \frac{dx_1(T_p)}{dt} = 0$$

$$\text{obs} : \mathcal{L}\left(\frac{dx_1(T_p)}{dt}\right) = sX_1(s) \Rightarrow \mathcal{L}'(sX_1(s)) = \dot{x}_1 = 0$$

$$\mathcal{L}'\left(\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right) = x(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}\omega_d t = 0$$

$$\Rightarrow \text{sen}(\omega_d T_p) = 0$$

$$\Rightarrow \omega_d T_p = n\pi \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

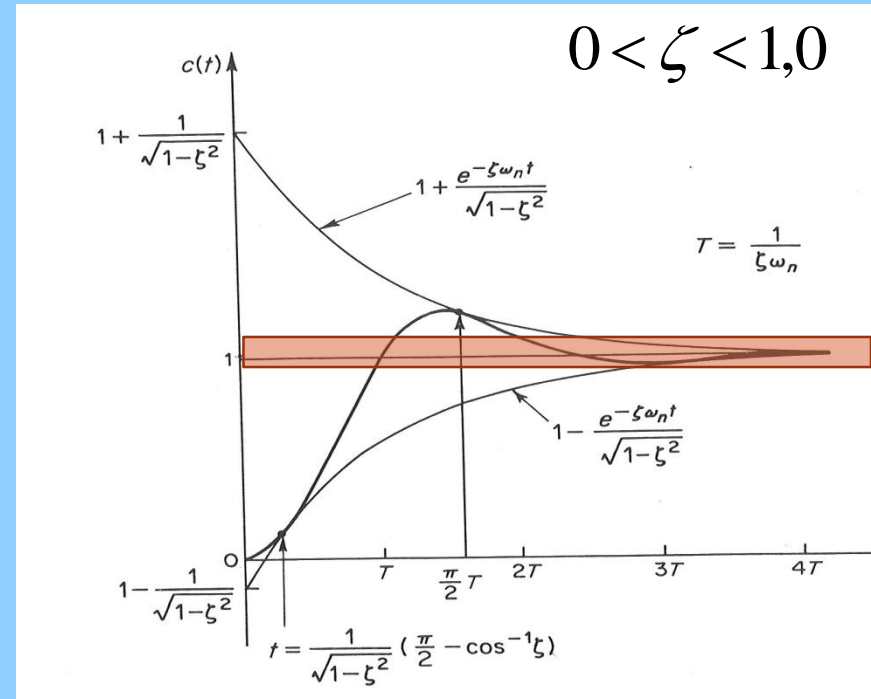
$$n = 1 \Rightarrow T_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

c) Tempo de acomodação:  $T_s$

$$e^{-\zeta\omega_n T_s} < 0,02 \text{ (faixa de 2\%)}$$

$$\Rightarrow |\zeta\omega_n T_s| < |\ln(0,02)| = 3,91 \cong 4,0$$

$$\Rightarrow T_s \cong \frac{4}{\zeta\omega_n} \cong 4T$$



d) Sobressinal ou "overshoot":

$$M_p = x_1(T_p) - 1$$

$$\Rightarrow M_p = e^{-\left( \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right)} \Rightarrow \text{n\~{a}o \u00e9 fun\u00e7\~{a}o de } \omega_n$$

# Sobressinal ('Overshoot')

Sobressinal (overshoot):

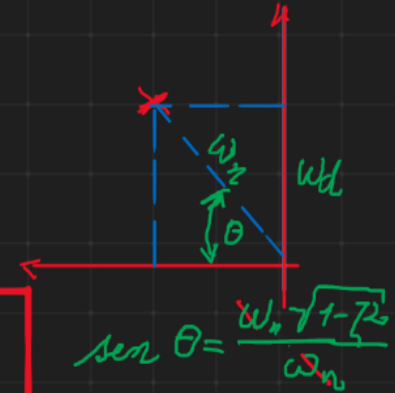
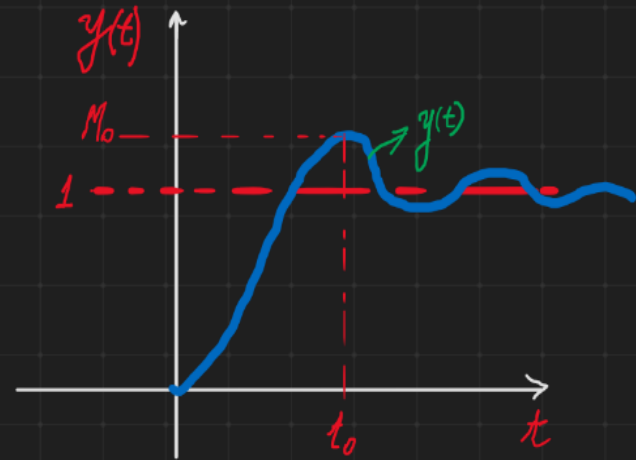
$$M_o = y(t_o) - 1$$

$$\therefore M_o = \frac{e^{-\zeta \omega_n t_o}}{\sqrt{1-\zeta^2}} (\sin \omega_d t_o + \theta)$$

como  $t_o = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$

$$\therefore M_o = \frac{e^{-\zeta \omega_n \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left( \sin \frac{\omega_d \pi}{\omega_d} + \theta \right)$$

$$\Rightarrow M_o = \frac{e^{-\left(\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \underbrace{\sin(\pi + \theta)}_{-\sin \theta} \Rightarrow M_o = -e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



$$M_o = -e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

# Sistemas de ordem superior

Admitir que o sistema pode ser escrito fatoradamente:

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{k \prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

Em sistemas físicos:  $n \geq m$ .

A resposta ao degrau pode ser obtida por:

$$Y(s) = \frac{1}{s} T(s)$$

Os pólos aparecem como pólos reais ou complexos conjugados (supor inicialmente que eles não sejam múltiplos)  $\Rightarrow$  separando em frações parciais temos:

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \sum_{k=1}^o \frac{c_k}{s + p_k} + \sum_{l=1}^q \frac{a_l s + b_l}{s^2 + 2(\zeta\omega_n)_l s + (\omega_n^2)_l}$$

# Sistemas de ordem superior

Achando  $y(t)$ :

$$y(t) = 1 + \sum_{k=1}^o c_k e^{-p_k t} + \sum_{l=1}^q d_l e^{-(\zeta\omega_n)_l t} \text{sen} [(\omega_d)_l t + \Theta_l]$$

SE TODOS OS PÓLOS DE MALHA FECHADA ESTÃO NO SEMI-PLANO ESQUERDO DE  $s$  (isto é, têm todos parte real negativa)  $\Rightarrow$  as exponenciais são decrescentes

$\Rightarrow$  O SISTEMA É ESTÁVEL!

Quanto mais próximo do eixo imaginário mais lentamente o efeito do pólo vai desaparecer (região de pólos dominantes).

# Polos dominantes

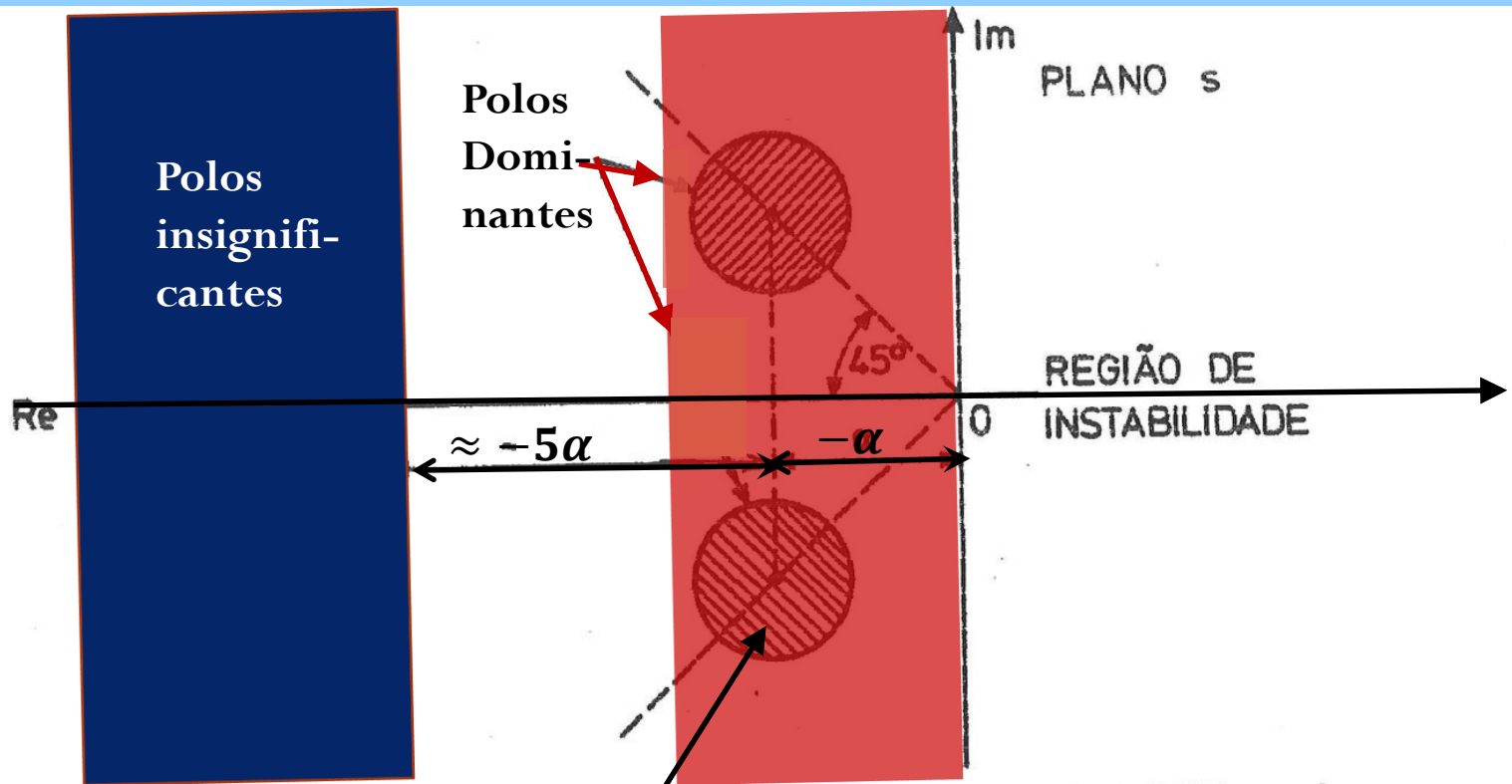


Figura 2.5 - Região de Dominância dos Pólos

Região achurada: polos complexos com pequeno sobressinal.  
Polos à  $45^\circ$  têm coeficiente de amortecimento  $\zeta = 0,707$