AULAS ANTERIORES 23/10/2020

Um conjunto V será um EV se, e somente se:

* 1º requisito → operações fundamentais $\begin{cases} i) \ \vec{u} + \vec{v} \in V \\ ii) \ \alpha \vec{u} \in V \end{cases}$ ✓

* 2º requisito → 8 axiomas → $\begin{cases} \text{Adição entre vetor} \\ \text{Multiplicação por escalar} \end{cases}$ ✓

Algebricamente, os elementos se comportam como vetores do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$.

Base

Um conjunto $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ será base de um EV V se, e somente se:

* B é LI. → $\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$, $\alpha_i = 0$

* B gera V. → $\forall \vec{v} \in V \ \exists \ \vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$

→ dim (V) ... número de vetores de uma base do EV

Seja $T: V \to W$ uma TL, então:

(I) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

(II) $T(\alpha \vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$, $\forall \vec{u} \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

** $T: V \to V$ é um OL!

Propriedades:

1) $T(\vec{0}) = \vec{0}$

2) $T(\underbrace{a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_n \vec{v}_n}_{CL}) = a_1 T(\vec{v}_1) + \dots + a_n T(\vec{v}_n)$

* $N(T) = \{ \vec{v} \in V \ / \ T(\vec{v}) = \vec{0} \} \longrightarrow$ SEV de V

* $Im(T) = \{ \vec{w} \in W \ / \ T(\vec{v}) = \vec{w} \} \longrightarrow$ SEV de W

T é injetora $\iff N(T) = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim(N(T)) = 0$ Nulidade

BIJETORA

T é sobrejetora $\iff Im(T) = W \Rightarrow \dim(Im(T)) = \dim(W)$ Posto

Teorema da Dimensão: $\dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T))$

Corolário:

$T: V \to W$

$\dim(V) = \dim(W)$

T é sobrejetora

T é bijetora

T é injetora

T transforma base de V em base de W

Slide 07 - Exemplo (2)

Matricialmente, a reflexão pode ser representada como:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$\underbrace{Rx(x,y)}_{(x',y')} = (x,-y)$

De onde se tem o sistema:

$$\begin{cases} x + 0y = x' \\ 0x - y = y' \end{cases} \therefore \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Serão fixos os vetores tais que $x' = x$ e $y' = y$, mas como $y' = -y$, esta solução só é possível se $y = 0$. Assim, a solução são os vetores do tipo $(x, 0)$, isto é, vetores $\in Ox$.
E a TL Rx pode ser representada como:

$$Rx(x,0) = (x,0),\ \forall x \in \mathbb{R} \Big\}\ \text{vetores fixos}$$

Slide 09 - Exemplos

1) $T(x,y) = (4x+5y,\ 2x+y)$ $\begin{cases} \vec{v_1} = (5,2) \\ \vec{v_2} = (2,1) \end{cases}$ $\begin{array}{cc} x & y \end{array}$ são autovetores?

* $T(\vec{v_1}) = T(5,2) = (30,12) = 6(5,2) = \overset{\lambda}{6}\,\vec{v_1}$

$\exists\ \lambda \in \mathbb{R} \therefore \vec{v_1}$ é autovetor associado a $\lambda = 6$.

* $T(\vec{v_2}) = T(2,1) = (13,5)$

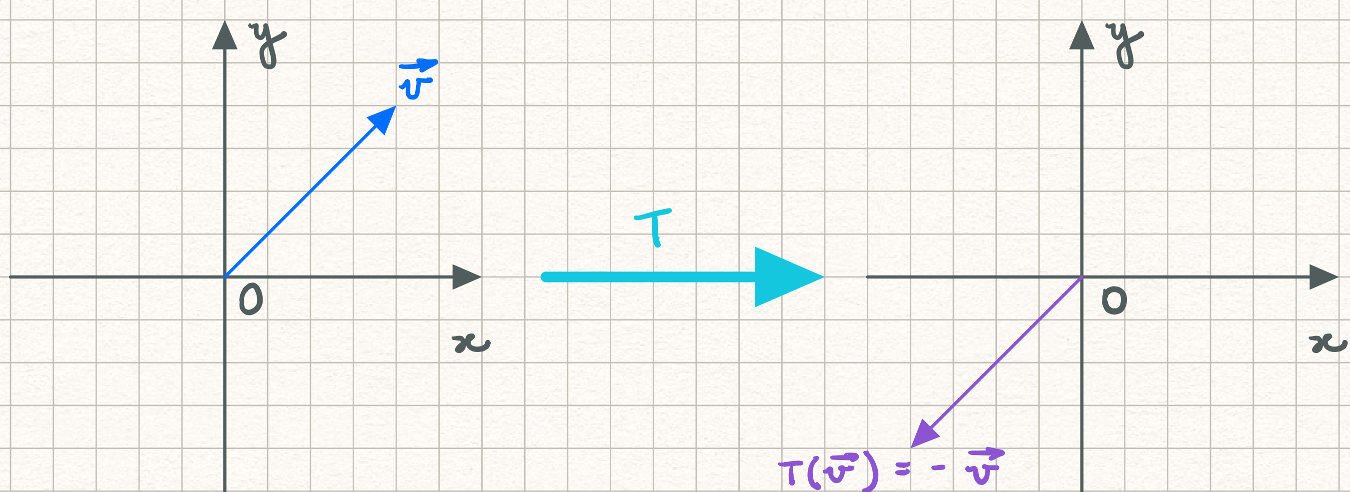
$\nexists\ \lambda \in \mathbb{R} \therefore \vec{v_2}$ não é autovetor.

2) $T(\vec{v}) = -\vec{v}$, $\vec{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (-x,-y) = \overset{\lambda}{-1}\,(x,y)$

$\exists\ \lambda \in \mathbb{R} \therefore \vec{v}, \vec{v} \neq 0$, é autovetor associado a $\lambda = -1$.

Graficamente:



Slide 12 - Exemplo

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\underbrace{T(x,y)}_{(x_1,y_1)} = (5x - y, x + 3y)$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x - y \\ x + 3y \end{bmatrix}$$

$A \longrightarrow$ matriz de transformação

1) Para encontrar os autovalores, resolver a equação característica (EC) do OL T:

EC: $\det(\underset{2\times 2}{A - \lambda I}) = 0$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\therefore \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \underbrace{\lambda^2 - 8\lambda + 16}_{p(\lambda)} = 0 \longrightarrow \lambda = 4$$

** $\lambda = 4$ é o único autovalor de T. O polinômio característico (PC) é $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ e tem grau $\underline{\underline{2}}$ em λ. Logo, essa raiz se repete (multiplicidade).

2) Para encontrar os autovetores, é preciso substituir λ no SLH a seguir:

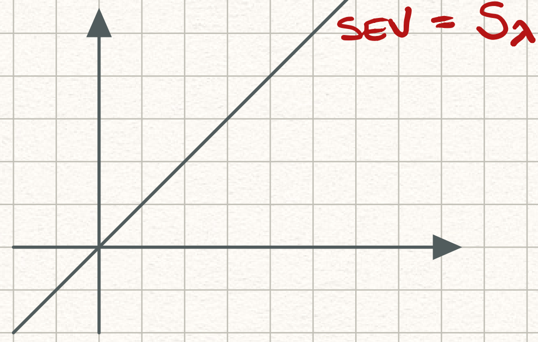
$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \quad \begin{cases} \vec{v} \in V \therefore \vec{v} = (x,y) \\ \vec{0} \in V \therefore \vec{0} = (0,0) \end{cases}$$

A cada λ distinto será associado um autovetor $\vec{v}$

$\lambda = 4$, $\vec{v} = (x, y) = ?$

$(A - \lambda I)\,\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$\lambda = 4$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ \cancel{x - y = 0} \end{cases} \qquad y = x \,/\!/ \quad x \in \mathbb{R}$$

Logo, $\vec{v} = (x, y) = (x, x) = x\,(1, 1)$, $x \neq 0$, são autovetores associados a $\lambda = 4$.

Para $\lambda = 4$, $\vec{v} = k\,(1, 1)$, $k \neq 0$ //

Slide 14 - Exercícios

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; $\lambda, \vec{v} = ?$

A ... matriz 3×3 $\therefore$ $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ → polinômio de grau $\underline{\underline{3}}$ em λ → até $\underline{\underline{3}}$ autovalores distintos

1) Autovalores (EC):

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{I_{3\times 3}} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$= (1-\lambda)^2(-1-\lambda) + 2(1-\lambda) = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(-1-\lambda)+2\right]$

$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+1)$

polinômio de 3º grau em λ $\therefore$ 3 raízes

EC: $p(\lambda) = 0$

$$(1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0 \quad \begin{cases} 1-\lambda = 0 \\ \lambda^2 = -1, \quad \lambda = \pm\sqrt{-1} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = \pm i \end{cases}$$

$\lambda \notin \mathbb{R} \therefore \nexists\, \vec{v} \in V$

2) Autovetores (SLH):

Para $\lambda = 1$, $\vec{v} = (x, y, z) = ?$

$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x - 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

$\therefore x = 2z;\quad y = 2z \quad z \in \mathbb{R}$

Logo:

$$\vec{v} = (\overset{x}{2z}, \overset{y}{2z}, \overset{z}{z}) = z(2,2,1), \quad z \neq 0$$

Para $\lambda = 1$, $\vec{v} = k(2,2,1)$, $k \neq 0$

Para $\lambda = \pm i$, $\nexists\, \vec{v} \in V$

2) $\vec{v_1} = (1,1)$, $\lambda_1 = 5$
$\vec{v_2} = (2,-1)$, $\lambda_2 = -1$, $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $\vec{v} = (4,1)$, $T(\vec{v}) = ?$

$EV = \mathbb{R}^2 \longrightarrow A$ ... matriz $2\times2 \longrightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $T(\vec{v}) = A\vec{v}$

Sabe-se que um autovalor e o autovetor a ele associado se relacionam com a matriz A da seguinte forma:

$$(A - \lambda I)\,\vec{v} = \vec{0}$$, tal que $\vec{v}$ e $\vec{0} \in V = \mathbb{R}^2$

Para $\lambda_1 = 5$ e $\vec{v_1} = (1,1)$:

$$(A - \lambda_1 I)\,\vec{v_1} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \right) \vec{v_1} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} a-5 & b \\ c & d-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a - 5 + b = 0 \\ c + d - 5 = 0 \end{cases} \longrightarrow (\mathrm{I}) \begin{cases} a + b = 5 \\ c + d = 5 \end{cases}$$

Para $\lambda_2 = -1$ e $\vec{v_2} = (2,-1)$:

$$(A - \lambda_2 I)\,\vec{v_2} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \right) \vec{v_2} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2(a+1) - b = 0 \\ 2c - (d+1) = 0 \end{cases} \longrightarrow (\mathrm{II}) \begin{cases} 2a - b = -2 \\ 2c - d = 1 \end{cases}$$

Compondo os sistemas (I) e (II):

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ c + d = 5 \\ 2a - b = -2 \\ 2c - d = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 2 \\ d = 3 \end{matrix} \quad \therefore \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A partir da matriz A, $T(\vec{v})$ e $\vec{v}$ se associam:

$$T(\vec{v}) = A\vec{v}$$

E, para $\vec{v} = (4,1)$:

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+4 \\ 8+3 \end{bmatrix} \longrightarrow T(\vec{v}) = (8, 11)$$

3) Autovalores e Autovetores de $I_{n \times n}$?

$$I_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} = A \longrightarrow \text{matriz } n \times n$$

$\therefore$ V ... EV de ordem n

$V = \mathbb{R}^n$

Encontrando os autovalores de A $\longrightarrow$ EC: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

I

$$= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow (1-\lambda)^n = 0$$

$$\lambda = 1$$

PC: $p(\lambda) = (1-\lambda)^n$ ... polinômio de grau n, com $\underline{n}$ raízes.

$\therefore \quad \lambda_i = 1, \quad i = 1, \dots, n \longrightarrow$ autovalor com multiplicidade n

Encontrando os autovetores de A $\longrightarrow$ SLH: $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$; $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$

$$(\underbrace{I}_{=A} - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}, \quad A = I$$

$\lambda = 1$

$$(I - I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\mathbb{O}_{n \times n} \vec{v} = \vec{0} \longrightarrow \forall \vec{v} \in V$$

Logo: $\lambda_i = 1$ $(i = 1, \dots, n)$ é autovalor associado a qualquer autovetor $\vec{v} \in V$.