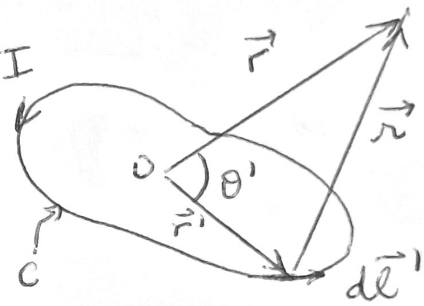
23/10/2020

Assim como no caso do potencial eletrostático V, também é possível construir uma expansão multipolar para $\vec{A}$ que pode ser usada para aproximar o potencial em pontos distantes da distribuição localizada de correntes.

Por exemplo, para o caso de um circuito fechado percorrido por corrente constante I

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}\,'}{\mathscr{r}}$$



Usando a representação em série para a função $1/\mathscr{r}$

$$\frac{1}{\mathscr{r}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'}}}_{= G(x,t)} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta')$$

$= G(x,t)$, com $x = \cos\theta'$ e $t = r'/r$

$(|t| < 1)$

Então

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\oint_C r'^l P_l(\cos\theta')\, d\vec{l}\,'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\oint_C d\vec{l}'}_{\text{monopolo}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^2}\oint_C r'\cos\theta'\, d\vec{l}'}_{\text{dipolo}}$$

$$+ \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\oint_C r'^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right) d\vec{l}'}_{\text{quadrupolo}} + \cdots$$

$$\oint_C d\vec{l}' = \vec{0} \Rightarrow \text{monopolo magnético é nulo}$$

Termo dominante é o termo de dipolo

$$\vec{A}_{dip} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\oint_C r'\cos\theta'\, d\vec{l}'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\oint_C (\hat{r}\cdot\vec{r}')\, d\vec{l}'$$

vetor área (lista 1a - ex.8)

$$\oint_C (\hat{r}\cdot\vec{r}')\, d\vec{l} = -\hat{r}\times\overbrace{\int_S d\vec{a}} = -\hat{r}\times\vec{a}$$

superfície cujo suporte é C

Prova:

Primeiro demonstraremos o seguinte resultado para uma função escalar f

$$\int_S \vec{\nabla} f \times d\vec{a} = - \oint_C f \, d\vec{l}$$

Apliquemos o teorema de Stokes a um campo vetorial

$\vec{v} = \vec{c} f$ onde $\vec{c}$ é um vetor constante qualquer

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \times (f \vec{c}) = f \, \cancelto{\vec{0}}{\vec{\nabla} \times \vec{c}} - \vec{c} \times \vec{\nabla} f$$

Então

$$- \int_S (\vec{c} \times \vec{\nabla} f) \cdot d\vec{a} = \oint_C (\vec{c} f) \cdot d\vec{l}$$

Além disso, podemos usar

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}, \qquad \text{(provar!)}$$

de forma que

$$(\vec{c}\times\vec{\nabla}f)\cdot d\vec{a} = \vec{c}\cdot(\vec{\nabla}f\times d\vec{a})$$

Portanto

$$-\vec{c}\cdot\left\{\int_S \vec{\nabla}f\times d\vec{a}\right\} = \vec{c}\cdot\left\{\oint_C f\, d\vec{l}\right\} \quad \forall\, \vec{c} \text{ cte}$$

Então

$$\boxed{\int_S \vec{\nabla}f\times d\vec{a} = -\oint_C f\, d\vec{l}}$$

Agora adotemos uma forma particular para a função escalar f

$$f = \vec{c}\cdot\vec{r}\,' \qquad \text{com } \vec{c} \text{ cte}$$

Então, de acordo com o resultado anterior

$$\int_S \vec{\nabla}'(\vec{c}\cdot\vec{r}\,') \times d\vec{a} = -\oint_C (\vec{c}\cdot\vec{r}\,')\, d\vec{l}\,'$$

$$\vec{\nabla}'(\vec{c}\cdot\vec{r}\,') = \cancelto{\vec{0}}{\vec{c}\times(\vec{\nabla}'\times\vec{r}\,')} + \cancelto{\vec{0}}{\vec{r}\,'\times(\vec{\nabla}'\times\vec{c})}$$

$$+ (\vec{c}\cdot\vec{\nabla}')\vec{r}\,' + \cancelto{\vec{0}}{(\vec{r}\,'\cdot\vec{\nabla}')\vec{c}}$$

Então

$$\vec{\nabla}'(\vec{c}\cdot\vec{r}\,') = (\vec{c}\cdot\vec{\nabla}')\vec{r}\,'$$

com

$$\vec{c}\cdot\vec{\nabla}' = c_x \frac{\partial}{\partial x'} + c_y \frac{\partial}{\partial y'} + c_z \frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\left.\begin{aligned} (\vec{c}\cdot\vec{\nabla})\, r'_x &= c_x \\ (\vec{c}\cdot\vec{\nabla}')\, r'_y &= c_y \\ (\vec{c}\cdot\vec{\nabla}')\, r'_z &= c_z \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\vec{c}\cdot\vec{\nabla}')\vec{r}\,' = \vec{c}$$

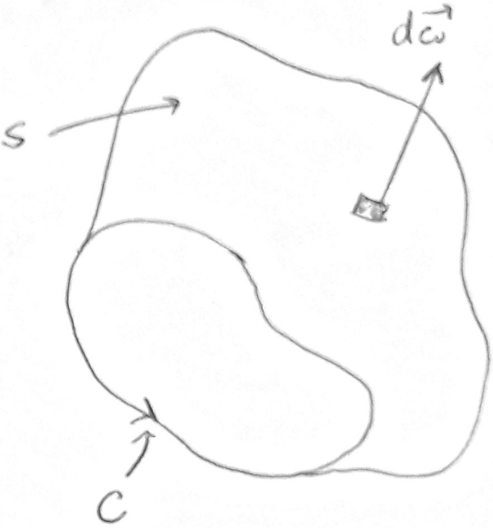
$$\Downarrow$$

$$\vec{\nabla}'(\vec{c}\cdot\vec{r}\,') = \vec{c}$$

Portanto

$$\oint_C (\vec{c}\cdot\vec{r}\,')\,d\vec{l}\,' = -\int_S \vec{\nabla}'(\vec{c}\cdot\vec{r}\,')\times d\vec{a}$$

$$= -\vec{c}\times\underbrace{\int_S d\vec{a}}_{=\vec{a}} = -\vec{c}\times\vec{a}$$



Tomando $\vec{c}=\hat{r}$, temos finalmente

$$\oint_C (\hat{r}\cdot\vec{r}\,')\,d\vec{l}\,' = -\hat{r}\times\vec{a} = \vec{a}\times\hat{r}$$

O termo de dipolo da expansão multipolar de um laço percorrido por corrente constante I pode então ser escrito na forma

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}(\vec{a}\times\hat{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\underbrace{(I\vec{a})}_{\equiv\vec{m}}\times\hat{r}$$

momento de dipolo magnético do laço ou circuito

$$\boxed{\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\hat{r}}{r^2}}$$

$$\vec{A}_{mono} = \vec{0} \qquad V_{mono}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\hat{r}}{r^2} \qquad V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

$\vdots$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\vdots$

magnetostática $\qquad\qquad\qquad$ eletrostática

O campo magnético associado ao dipolo é dado por

$$\vec{B}_{dip} = \vec{\nabla}\times\vec{A}_{dip}$$

Para um dipolo de momento $\vec{m}$ na direção $\hat{z}$

$$\vec{m} = m\hat{z}$$

$$\hat{z}\times\hat{r} = \hat{z}\times(\sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z})$$

$$= \sin\theta\cos\phi\,\hat{y} - \sin\theta\sin\phi\,\hat{x}$$

$$= \sin\theta\underbrace{(-\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y})}_{=\hat{\phi}} = \sin\theta\,\hat{\phi}$$

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin\theta}{r^2} \hat{\phi}$$

Então

$$\vec{B}_{dip} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{dip} = \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \, A_\phi) \hat{r}$$

$$- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{\theta}$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r\sin\theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin^2\theta) \hat{r} - \frac{1}{r} \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \hat{\theta} \right\}$$

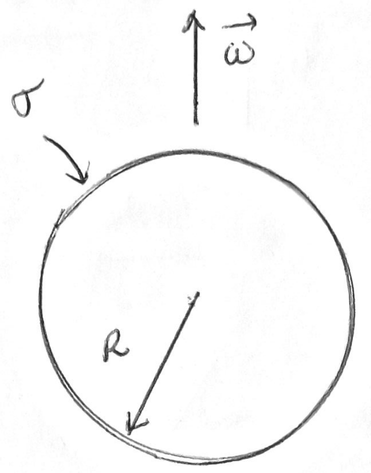
$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \left[2\cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right]$$

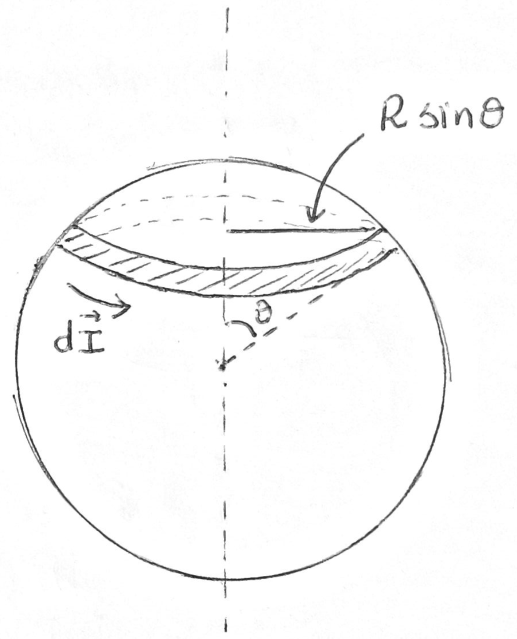
$$\vec{B}_{dip} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \left[3\cos\theta \, \hat{r} - \cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right]$$

$$\boxed{\vec{B}_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m} \right]}$$

← independente do sistema de coordenadas

Casca esférica de raio R, densidade superficial de carga uniforme σ e velocidade angular $\vec{\omega}$ (9)





$$d\vec{m} = \vec{a}\, dI$$

$$\vec{a} = \pi (R\sin\theta)^2 \hat{z}$$

$$dI = K(R\,d\theta)$$
$$= \sigma v (R\,d\theta)$$
$$= \sigma\omega R\sin\theta (R\,d\theta)$$
$$= \sigma\omega R^2 \sin\theta\, d\theta$$

$$d\vec{m} = \pi R^4 \sigma\omega \sin^3\theta\, d\theta\, \hat{z}$$

$$\vec{m} = \int d\vec{m} = \pi R^4 \sigma\omega\, \hat{z} \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{4}{3}\pi R^4 \sigma\omega\, \hat{z}$$

Logo, nesse caso

$$\vec{A}_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin\theta}{r^2} \hat{\phi}$$

$$= \frac{\mu_0 R^4 \sigma \omega}{3} \frac{\sin\theta}{r^2} \hat{\phi}$$

que é consistente com o resultado da aula passada obtido via integração direta da densidade superficial de corrente $\vec{K}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 R \sigma \omega}{3} r \sin\theta \, \hat{\phi} & (r \leq R) \\[2ex] \dfrac{\mu_0 R^4 \sigma \omega}{3} \dfrac{\sin\theta}{r^2} \hat{\phi} & (r \geq R) \end{cases}$$

Perceba que o termo de dipolo $\vec{A}_{dip}$ é idêntico ao potencial vetor exato na região $r \geq R$.

Portanto, todos o demais multipolos $(l \geq 2)$ são nulos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}\,')}{\imath}\, da'$$

Usando a representação em série para $1/\imath$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{K}(\vec{r}\,') \left\{ \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta') \right\} da'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int \vec{K}(\vec{r}\,')\, r'^{l}\, P_l(\cos\theta')\, da'$$

Aplique a expressão em forma de série acima para o caso da casca esférica carregada em rotação e mostre que apenas o termo de dipolo ($l=1$) é não-nulo.