SISTEMAS LINEARES NÃO HOMOGÊNEOS EM $\mathbb{R}^n$

Consideremos agora o sistema:

$$(1) \quad \frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{F}(t)$$

sendo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

$\mathbf{F}$ e $\mathbf{A}$, contínuas.

Como vimos, se $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $x_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}$ é um conjunto L.I.

de soluções do sistema homogêneo associado:

$$(2) \quad \frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x},$$

então a matriz

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

é uma *matriz fundamental* de (2), ou seja, satisfaz a equação matricial:

$$\frac{d}{dt}\Phi = \mathbf{A}\Phi$$

e a solução geral de (2) é dada por $\mathbf{X} = \Phi\mathbf{C}$,

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

sendo $\mathbf{C}$ uma matriz coluna de n constantes arbitrárias $c_1, c_2, \dots, c_n$.

1. VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS

De modo análogo ao que foi feito para equações de segunda ordem, podemos procurar soluções do sistema não homogêneo 1, substituindo a matriz coluna constante $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ por uma matriz

coluna dependente de t : $\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$.

Substituindo $\mathbf{X}$, por $\Phi(t)\mathbf{U}(t)$, na equação (1), obtemos

$$\begin{aligned}\Phi(t)\mathbf{U}'(t) + \Phi(t)\Phi'(t)\mathbf{U}(t) &= \mathbf{A}(t)\Phi(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}(t) \\ \Leftrightarrow \Phi(t)\mathbf{U}'(t) + \mathbf{A}(t)\Phi(t)\mathbf{U}(t) &= \mathbf{A}(t)\Phi(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}(t) \\ \Phi(t)\mathbf{U}'(t) &= \mathbf{F}(t).\end{aligned}$$

Multiplicando por $\Phi^{-1}(t)$, obtemos
 $\mathbf{U}'(t) = \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t) \Rightarrow \mathbf{U}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t) dt.$

Assim, uma solução particular do sistema (1) é dada por

$$\mathbf{X}_p = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t) dt.$$

e a solução geral é

$$(3) \quad \mathbf{X} = \Phi(t)\mathbf{C} + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t) dt,$$

que é a **fórmula da variação das constantes**.

Exemplo 1. *Encontre a solução geral do sistema não homogêneo*

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Em primeiro lugar vamos resolver o sistema homogêneo

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{X}.$$

A equação característica é $\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ ou $\lambda = -5$.

Os autovetores correspondentes são $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Portanto, uma matriz fundamental é

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1e^{-2t} & 1e^{-5t} \\ 1e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} e$$

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-2t} & \frac{1}{3}e^{-5t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & \frac{1}{3}e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Uma solução particular do sistema não homogêneo é:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_p &= \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)F(t) dt \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-2t} & \frac{1}{3}e^{-5t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & \frac{1}{3}e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^t \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^t \\ -\frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}1e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral no intervalo $(-\infty, +\infty)$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}1e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix} \\ &= c_1 \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{-5t} \\ -2e^{-5t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}1e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Suponhamos agora, que estamos interessados no problema de valor inicial:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{X} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t) \\ \mathbf{X}(t_0) &= \mathbf{X}_0\end{aligned}$$

Escolhendo a solução particular do problema não homogêneo como

$$\mathbf{X}_p = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s) ds,$$

e substituindo na fórmula de variação das constantes (3), obtemos

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\mathbf{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s) ds,$$

Impondo a condição inicial, teremos $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0) = \Phi(t_0)\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{C} = \Phi(t_0)^{-1}\mathbf{X}_0$ e obtemos uma forma alternativa da fórmula de variação das constantes:

$$(4) \quad \mathbf{X}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\mathbf{X}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s) ds.$$

Em particular, se $\Phi(t_0) = \mathbf{I}$, a única solução do PVI é dada por

$$\begin{aligned}(5) \quad \mathbf{X}(t) &= \Phi(t)\mathbf{X}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s) ds \\ &= \Phi(t)\mathbf{X}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s) ds\end{aligned}$$

Finalmente, no caso em que $\mathbf{A}$ tem coeficientes constantes, vimos que $e^{(t-t_0)\mathbf{A}} = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ e a fórmula (4) fica:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{X}_0 + e^{\mathbf{A}t} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}s} \mathbf{F}(s) \, ds \\ (6) \qquad &= e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)} \mathbf{F}(s) \, ds \end{aligned}$$