V espaço vetorial finitamente gerado

aula de 23 de outubro

DEF: Uma **BASE** de um espaço vetorial V é um subconjunto $B \subset V$ tal que:

(1) B é LI e (2) $[B] = V$.

TEOREMA 1 Todo espaço vetorial F.G tem uma base.

Dem:

FATOS IMPORTANTES UTILIZADOS

(1) Se $S \subset V$ é LD então pelo menos um dos vetores de S é CL dos outros.

(2) Se $S = \{u_1, ---, u_m\}$ e u_i para algum i, $1 \leq i \leq m$ é combinação linear dos outros vetores de S, então $[S - \{u_i\}] = [S]$

TEOREMA 2. Se V é gerado por $S = \{u_1, ---, u_m\}$, então todo subconjunto de V com mais do que m vetores é LD.

Dem: Só utiliza que todo sistema linear homogêneo com mais incógnitas do que equações tem sol. não trivial.

Exemplos de bases

$\mathbb{R}^n$

can $= \{e_1, \dots, e_n\}$ onde $e_i = (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{posição } i}}{1}, 0, \dots, 0)$

↳ base canônica

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ can $= \{E_{ij},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & j & & \end{matrix} \\ i & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

E_{ij} é a matriz que tem 1 na linha i, coluna j e 0 em todas as outras entradas

$P_n(\mathbb{R})$ can $= \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$

$\dim \mathbb{R}^n = n$ $\quad \dim M_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn$ $\quad \dim P_n(\mathbb{R}) = n+1$

$\dim \{0\} = 0$, já que uma base de $\{0\}$ é $\emptyset$.

TEOREMA 3: Seja V um espaço vetorial finitamente gerado.
(Teorema da Invariância)

Sejam $B_1 = \{u_1, ---, u_m\}$ e $B_2 = \{v_1, ---, v_n\}$ bases de V. Então $m = n$.

Dem: Como $[B_1] = V$ e B_2 é LI, então $n \leq m$, pois se $n > m$, pelo Teorema 2 teríamos que B_2 seria LD.

Como $[B_2] = V$ e B_1 é LI, novamente pelo Teorema 2 temos que $m \leq n$.

Logo $m = n$.

DEF: dimensão de V

$\dim V$ é o número de elementos de uma base qualquer de V.

TEO: Seja V um espaço vetorial de dimensão n.

Seja $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$, $n = \dim V$.

Então:

(1) Se S é LI então S é uma base de V.

(2) Se $[S] = V$ então S é uma base de V.

Dem: (1) $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ é LI e $n = \dim V$.

Temos que mostrar que $[S] = V$.

É claro que $[S] \subset V$. Temos que mostrar que $V \in [S]$.

Seja $\begin{cases} v \in V. \\ v \notin S \end{cases}$ O conjunto $S \cup \{v\}$ tem $n+1$ vetores.

Logo $S \cup \{v\}$ é LD devido ao Teorema 2.

Como S é LI, já vimos que v tem que ser CL dos vetores de S.

(UTILIZADO: Se S é LI e $S \cup \{v\}$ é LD, então $v \in [S]$.)

(b) Agora, temos que mostrar que S é LI.

Se S fosse LD, obteríamos uma base B de V, $B \subset S$ e B com menos do que n vetores, o que é absurdo.

<u>TEOREMA DO COMPLETAMENTO</u>: Seja V um espaço vetorial de dimensão n e seja $S \subset V$, $S = \{u_1, \ldots, u_r\}$, S LI. Então existe B base de V tal que $B \supset S$, ou seja, existem vetores $u_{r+1}, \ldots, u_n \in V$ tais que $B = \{u_1, \ldots, u_r, \ldots, u_n\}$ é base de V.

Dem:

Seja $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V.

Então, o conjunto $S \cup C$ gera V, já que $[C] = V$.

Seja B o maior subconjunto LI de $S \cup C$ tal que $B \supset S$.

Mostrar que B é uma base de V.

Como B já é LI, temos que mostrar que $[B] = V$

Podemos supor que

$B = \{u_1, ---, u_r, v_1, ---, v_s\}$

Se $i > s$, $\{v_i\} \cup B$ é LD, pois B é LI e é o subconjunto LI máximo contido em $S \cup C$.

Logo v_i é combinaçõ linear de vetores B.

Isso ocorre para todo $i = s+1, ---, n$.

Logo $[C] \subset [B]$, ou seja $V \subset [B]$ o que implica que $[B] = V$.

Logo B é uma base de V (e $r + s = n$).

PROPOSIÇÃO: Seja W um espaço vetorial de um espaço vetorial de dimensão finita V. Então $\dim W \leq \dim V$. Se $\dim W = \dim V$ então $W = V$.

Dem: Se $W = \{0\}$ então $W = [\phi]$.

Suponha então que $W \neq \{0\}$. Então existe $w_1 \in W$, $w_1 \neq 0$.

Se $W = \{a w_1 \mid a \in \mathbb{R}\}$, então $W = [w_1]$. Se não existe $w_2 \in W$ tal que $\{w_1, w_2\}$ é LI. Se $W = [w_1, w_2]$, acabou. Se não existe w_3 tq $w_3 \notin [w_1, w_2]$. Então $[w_1, w_2, w_3]$ é LI.

E assim por diante. Como V é finitamente gerado, $\dim V = n$ e $W \subset V$, esse processo tem que parar, se não W (e então V) teria um subconjunto LI infinito. Conseguimos então um conjunto LI $\{w_1, \ldots, w_r\} \subset W$, $r \leq n$ e tal que $\{w_1, \ldots, w_r\} \cup \{w\}$, $w \in W$ é LD, qualquer que seja $w \in W$. Logo $[w_1, \ldots, w_r] = W$.

e $\{w_1, \ldots, w_r\}$ é uma base de W.

Se $r = n$; então $\{w_1, ---, w_n\} \cup \{v\}$ é LD $\forall\ v \in V$.

Como $\{w_1, ---, w_n\}$ é LI, v é CL de $w_1, ---, w_n$.

Logo $\{w_1, ---, w_n\}$ é uma base de V e então $W = V$.