O QUE É PRECISO SABER MUITO BEM SOBRE SISTEMAS LINEARES

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

$X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, na notação matricial, o sistema pode ser escrito como

$$AX = B.$$

Resolver o sistema é determinar X!

(isto é, determinar $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$A\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = B.)$$

DEF: Dois sistemas lineares são equivalentes se e somente se eles têm as mesmas soluções.

A matriz aumentada do sistema é $A \mid B$ ou seja $\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$.

OPERAÇÕES ELEMENTARES NAS LINHAS DE UMA MATRIZ

(1) Multiplicar uma linha por um número real $\neq 0$.
(2) Substituir uma linha por ela mesma mais um múltiplo de outra linha.
(3) Trocar a posição de 2 linhas.

TEOREMA: Realizar as operações elementares nas linhas da matriz aumentada de um sistema linear transforma o sistema $AX = B$ em um sistema linear EQUIVALENTE $A'X = B'$.

Eliminação Gaussiana

FORMA ESCALONADA E FORMA ESCALONADA REDUZIDA POR LINHAS

1. Se uma linha não consistir inteiramente de zeros, então o primeiro número não nulo da linha é 1. Ele é chamado PIVÔ.

2. Se existirem linhas constituídas inteiramente de zeros, então elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz.

3. Em quaisquer 2 linhas sucessivas que não consistem só em zeros, o pivô da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivô da linha superior.

4. Cada coluna que contém um pivô tem zeros nas demais entradas.

Uma matriz que tem as 3 primeiras propriedades está em FORMA ESCALONADA, e se tiver também a 4, está em FORMA ESCALONADA REDUZIDA.

SISTEMA HOMOGÊNEO: Se $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ no sistema $AX = B$.

Para um sistema homogêneo só há 2 opções:

(1) Só tem a solução trivial.

(2) Tem infinitas soluções.

TEOREMA DAS VARIÁVEIS LIVRES

Se um sistema linear homogêneo tiver n incógnitas e se a forma escalonada tiver r linhas não nulas, então o sistema tem $n-r$ variáveis livres.

COROLÁRIO: Um sistema linear homogêneo com mais incógnitas do que equações tem sempre infinitas soluções.

TEOREMA: Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

As afirmações a seguir são equivalentes:

(1) A é inversível.

(2) $AX = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ tem apenas a solução trivial.

(3) A forma escalonada reduzida de A é a matriz identidade.

(4) O sistema $AX = B$ tem uma única solução qualquer que seja a matriz $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

(DEF: A é inversível se existir $C \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AC = CA = I_n$)

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ - & & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$ é a matriz identidade