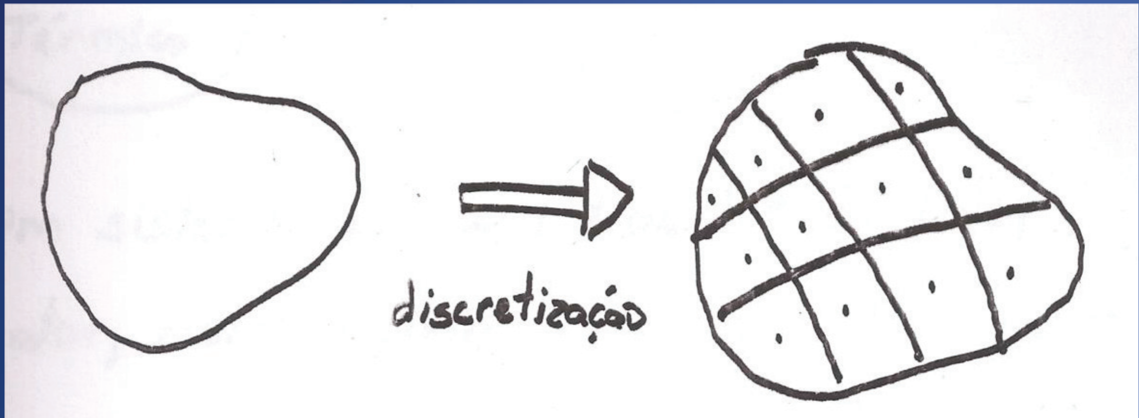
Capitulo 4

Princípios da Análise Térmica pelo Método Nodal

Princípios da análise térmica pelo método nodal



Equações diferenciais - sistema de equações álgebro-diferenciais

Regime transitório – álgebro-diferenciais

Regime permanente – algébrico

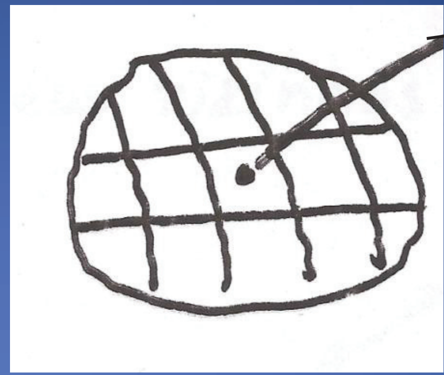
São tratadas pelo método nodal:

- Condução: 1, 2 e 3D (inclusive com propriedades variando c. temp.)
- Radiação: com superfícies negras ou cinzentas meio participante ou não
- Convecção: utilizando o conceito de “h” e por transporte de massa.

Problemas de eng.: condução + radiação + convecção + geometria complexa.

Principio da discretização:

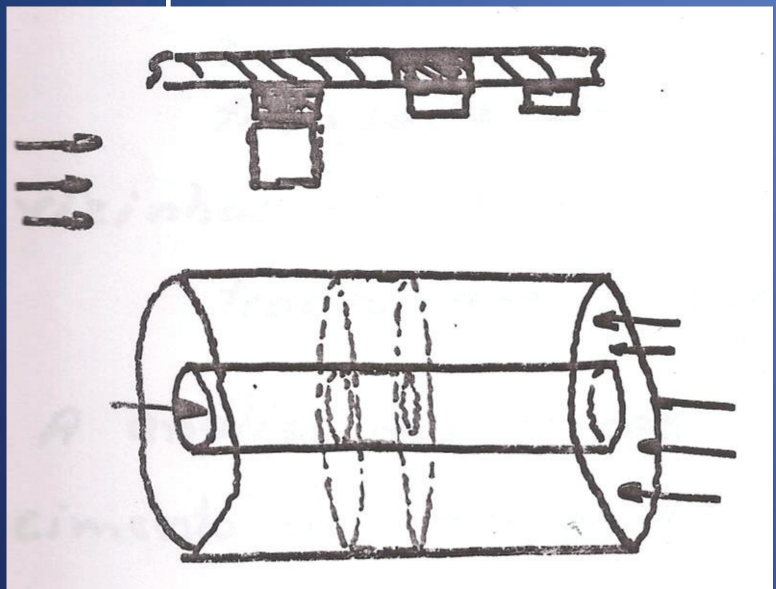
Sistemas térmicos

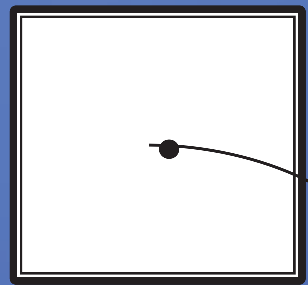


Vi, Ti

Um sistema térmico (trocador de calor, reator, motor elétrico) pode ser decomposto em um número finito de elementos volumétricos (Vi) supostos isotérmicos.

Exemplo:





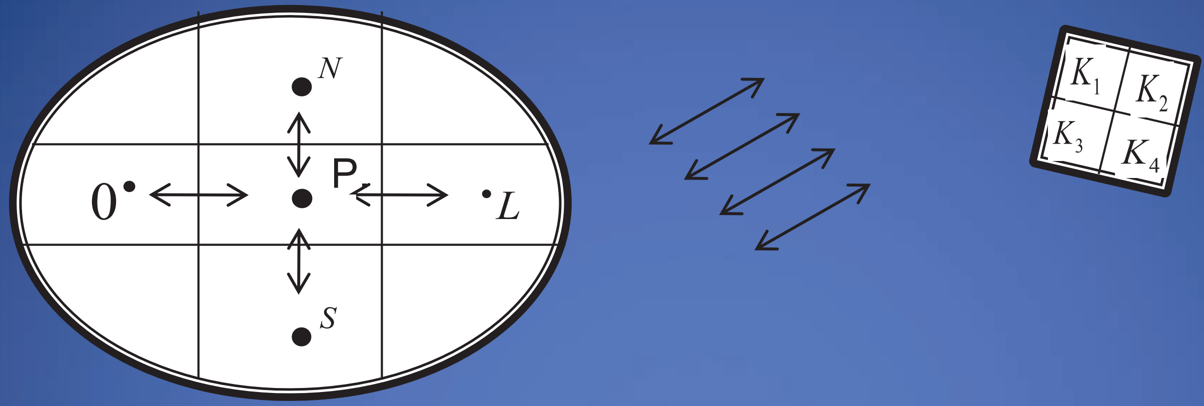
$$Ci = \rho Cp Vi$$

Vi ...volume do nó

Cp ...calor específico

Ci ...capacitância do nó

O nó i troca energia com um conjunto de nós (j) que representam seus vizinhos imediatos ou distantes.



Vizinhos imediatos de $i : n, s, L, O$

Trocas por condução, convecção ou transporte de massa.

Vizinhos distantes de $i : K_1, K_2, K_3, K_4$

Trocas por radiação

A análise das trocas conduzirá ao estabelecimento de uma malha de "conexões" que serão designadas por condutâncias térmicas.

Condutância Gij

$$\phi ij = Gij(Tj - Ti)$$

diferença de temperatura

entre os nós i e j

Fluxo de calor
Trocado entre os nós i e j

condutância térmica $G = \frac{1}{R}$

❖ Descrever um sistema térmico significa portanto instalar uma malha de capacitâncias de fontes e de condutâncias térmicas.

Diferentes componentes de um modelo nodal

Equação fenomenologia relativa a um volume infinitesimal dv:

$$\underbrace{\rho Cp \frac{\partial T}{\partial t} \partial v}_{(1)} = \underbrace{(\partial iv \phi')\partial v}_{(2)} + \underbrace{q \partial v}_{(3)}$$

(1) ...taxa de variação de energia interna

(2) ...balanço de fluxos em dv

(3) ...dissipação interna ou fonte de calor em dv

Integrando no volume Vi:

$$\int_{vi} \rho Cp \frac{\partial T}{\partial t} \partial v = \int_{vi} (\partial vi \phi') \partial v + \int_{vi} q \partial v$$

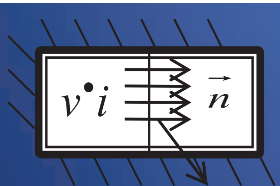
$\boxed{(1)}$ $\boxed{(2)}$ $\boxed{(3)}$

1 – considerando a hipótese de isotermicidade deste volume podemos escrever:

$$\int_{vi} \rho Cp \frac{\partial T}{\partial t} \partial v = \underbrace{\rho Cp vi}_{Ci} \frac{\partial T}{\partial t}$$

2 – aplicando o teorema de Gree-Ostrogradsky

$$\int_{vi} (div \phi') dv = \int_{S} \phi' \bullet \vec{n} ds$$



$$Se \phi' e \vec{n} paralelos \Rightarrow \int_{s} \phi' . n \partial s = \underbrace{\phi' . s}_{\phi}$$

3 – $\int_{vi} q \partial v = q v_i = Q_i$

$$Ci\frac{\partial T_i}{\partial t} = \underbrace{\phi_{cond} + \phi_{conv} + \phi_{rad.} + \phi_{tr.m.}}_{R^i} + Qi$$

wats

Ci ....capacitância térmica do nó

C .... fonte de calor dissipado em Vi (watts)

$\phi_{cond}, \phi_{conv}, \ldots$ Fluxos de calor trocados entre o nó i e seus vizinhos.

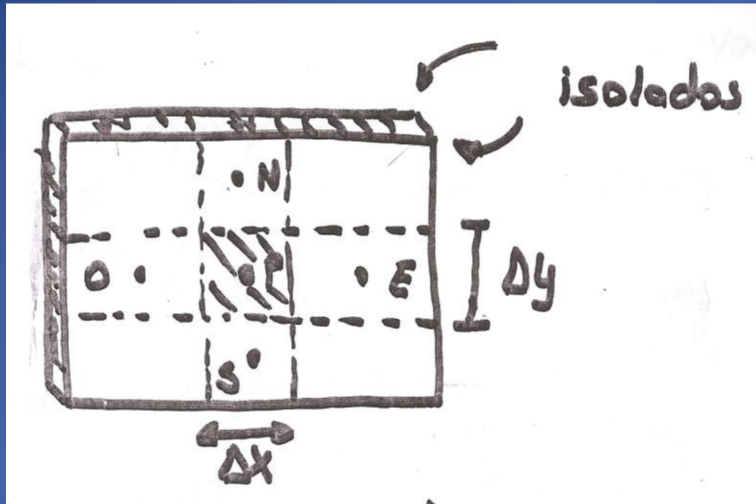
Os fluxos ϕ são contabilizados positivamente quando entram no volume Vi e negativamente quando estão saindo de Vi .

Se regime permanente $\rightarrow \frac{\partial Ti}{\partial t} = 0$

$$\phi_{cond} + \phi_{conv} + \phi_{rad.} + \phi_{tr.m.} + Qi = 0$$

Dedução da equação de balanço nodal para um problema de condução 2D

$$y \uparrow_{\rightarrow X}$$



$$\rho C p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X}\left(K \frac{\partial T}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \mathrm{Q}$$

Integrando no volume:

$$\underbrace{\int_{vi} \rho C p \frac{\partial T}{\partial t} \partial v}_{(1)} = \underbrace{\int_{vi} \frac{\partial}{\partial X}\left(K \frac{\partial T}{\partial X}\right) \partial v}_{(2)} + \underbrace{\int_{vi} \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial T}{\partial y}\right) \partial v}_{(3)} + \underbrace{\int_{vi} q \, \partial v}_{(4)}$$

$$\int_{vi} o \partial v = \int_{X}^{X+\Delta X} \int_{y}^{y+\Delta y} \int_{Z}^{Z+\Delta Z} \partial X \partial y \partial Z$$

1 - $$\int_{vi} \rho Cp \frac{\partial T}{\partial t} \partial v = \int_{X}^{X+\Delta X} \int_{y}^{y+\Delta y} \rho Cp \frac{\partial T}{\partial t} \partial X \partial y$$

Com a hipótese de isotermicidade no volume:

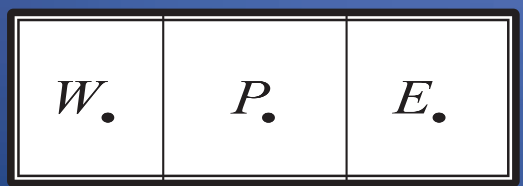
$$\rho Cp \frac{\partial T}{\Delta t} \int_{X}^{X+\Delta X} \int_{y}^{y+\Delta y} \partial x \partial y = \rho Cp \Delta X \Delta y \frac{\partial T}{\partial t}$$

Considerando um comprimento unitário em Z:

$$Vp = \Delta X \cdot \Delta y \cdot 1 \Rightarrow \rho Cp Vp \frac{\partial T}{\partial t}$$

2 - $$\int_{vi} \frac{\partial}{\partial X}\left(K \frac{\partial T}{\partial X} \right) \partial v + \int_{X}^{X+\Delta X} \int_{y}^{y+\Delta y} \frac{\partial}{\partial X}\left(K \frac{\partial T}{\partial X} \right) \partial y \partial x =$$

$$\int_{X}^{X+\Delta X} \frac{\partial}{\partial X}\left(K \frac{\partial T}{\partial X} \right) \partial y \partial x = \partial y \left[\left(K \frac{\partial T}{\partial X} \right)_{X+\Delta X} - \left(K \frac{\partial T}{\partial X} \right)_{X} \right]$$



XI $\quad$ $IX + \Delta X$

Representando as derivadas pelo método das derivadas centradas:

$W\cdot$	$P\cdot$	$E\cdot$

X $\quad$ $X+\Delta X$

$$\left(K\frac{\partial T}{\partial X}\right)_{X+\Delta X} = K\frac{T_E - T_P}{\Delta X_{PE}}$$

$$\left(K\frac{\partial T}{\partial X}\right)_{X-\Delta X} = K\frac{T_P - T_W}{\Delta X_{WP}}$$

3 – analogamente na direção y temos:

$\bullet N$
$\bullet P$
$S_\bullet$

$$y+\Delta y\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y+\Delta y} = K\frac{T_N - T_P}{\Delta y_{PN}}$$

$$\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y} = K\frac{T_P - T_S}{\Delta y_{PS}}$$

4 - $\int_{VI} q\partial v = q\Delta x \cdot \Delta y$

assumindo $\Delta Z = 1 \Rightarrow 9 \cdot \Delta X \cdot \Delta y \cdot \Delta Z = Q_P$

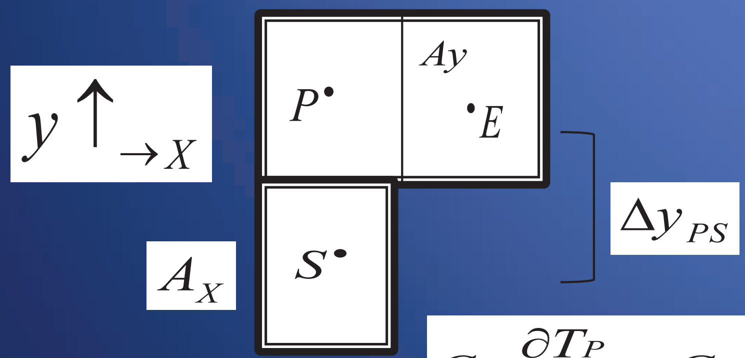
Finalmente juntando os termos:

$$\rho C p V p \frac{\partial T_P}{\partial t} = \frac{K \Delta y}{\Delta X_{PE}} (T_E - T_P) - \frac{K \Delta y}{\Delta X_{PW}} (T_P - T_W) +$$
$$+ \frac{K \Delta X}{\Delta y_{PN}} (T_N - T_P) - \frac{K \Delta X}{\Delta X_{PS}} (T_P - T_S) + Qr$$

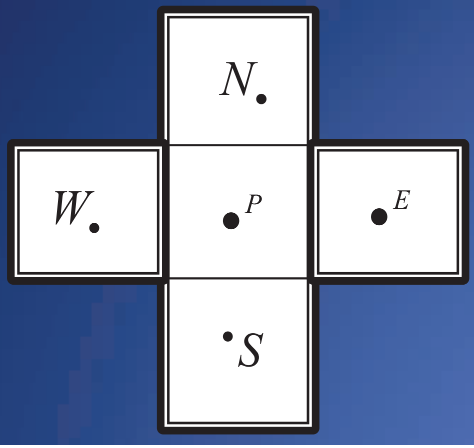
Fazendo ΔZ unitário podemos escrever:

$$G_{EP} = \frac{K \Delta y}{\Delta y_{PN}} \cdot \Delta Z$$
$$G_{EP} = \frac{K A y}{\Delta y_E}, G_{WP} = \frac{K A y}{\Delta X_{PW}}$$
$$G_{NP} = \frac{K A y}{\Delta y_{PN}}, G_{SP} = \frac{K A x}{\Delta X_{SP}} \quad \Delta X_{PE}$$

área perpendicular ao fluxo de calor (Ay)



$$C_P \frac{\partial T_P}{\partial t} = G_{EP}(T_E - T_P) + G_{PW}(T_W - T_P) +$$
$$+ G_{NP}(T_N - T_P) + G_{SP}(T_S - T_P) + Q_P$$



fluxo de calor trocado entre E e P

$$C_P \frac{\partial T_P}{\partial t} = G_{EP}(T_E - T_P) + G_{PW}(T_W - T_P) +$$
$$+ G_{NP}(T_N - T_P) + G_{SP}(T_S - T_P) + Q$$
$$C_P \frac{\partial T_P}{\partial t} = \phi_{EP} + \phi_{PW} + \phi_{NP} + \phi_{SP} + \phi_P$$

$$\phi_{EP} = \frac{KA}{\Delta X_{PE}}(T_E - T_P)$$

$$Se\,T_E \rangle T_P \Rightarrow (T_E - T_P) \rangle 0 \Rightarrow \phi_{EP} \rangle 0$$

(fluxo entrando no volume P)

$$Se\,T_E \langle T_P \Rightarrow (T_E - T_P) \langle 0 \Rightarrow \phi_{EP} \langle 0$$

(fluxo saindo do volume P)

Noção de nós de difusão e de capacitância

De acordo com o desenvolvimento mostrado, integrando-se a equação de balanço de energia no volume nodal Vi , obtemos a expressão da condutância térmica.

$$Ci = \int_{Vi} \rho i C p i \partial Vi \qquad [Ci] = \frac{J}{K}$$

Sendo o nó homogêneo:

$$Ci = \rho i C_{Pi} Vi$$

Portanto um nó associado a um elemento de volume possui uma capacitância térmica e é denominado <u>Nó de difusão</u>

Equação de balanço nodal para um nó de difusão.

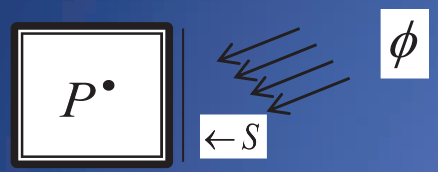
$$Ci = \frac{\partial Ti}{\partial i} = \cdots\cdots$$

A capacitância aparece junto a derivada temporal

Ci representa fisicamente a inércia térmica do nó 

Noção de nós aritméticos

Em certas ocasiões é necessário conhecer a temperatura superficial de um nó de difusão. Por exemplo em problemas de convecção:



Se utilizarmos o ponto P para o cálculo do calor trocado por convecção com o meio ambiente, vamos obter resultados errôneos.
Por isso usamos o conceito de nó aritmético.

$$\underbrace{C_S \frac{\partial S_S}{\partial t}}_{= 0} = \phi_{cond} + \phi_{conv} + \phi_{rad} + Q_S$$

Este tipo de nó não tem mais capacitância térmica pois seu volume é nulo. Sua temperatura evolui no tempo pois está associado à temperatura de seus vizinhos.

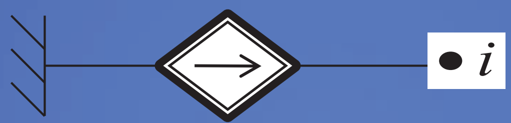
Noção de fonte de calor

É quando um nó possui uma dissipação interna ou quando ele está submetido a uma fonte externa de calor.

Exemplo: - Elemento combustível

- Nó submetido a um fluxo solar

$$Qi = \int_{Vi} q''\partial V\,[Q] = W$$



$\downarrow$

Densidade volumétrica (W/m³) Se a densidade de calor for uniforme:

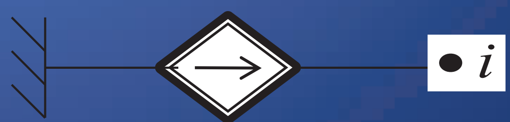
$$Qi = q''Vi$$

Pode-se afetar uma fonte de calor a um nó aritmético:

$$Qi = \int_{Vi} q''\partial S$$

$\downarrow$

Densidade superficial (W/m²)



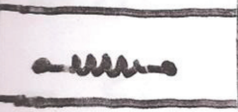
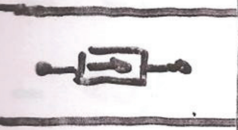
Noção de condutância

Expressão do fluxo de calor trocado entre Z nós sejam eles de difusão o aritméticos:

$$\phi_{ij} = G_{ij}\left(Tj - Tj\right)$$

Depende do tipo de troca térmica entre os nós i e j

Para geometrias cartesianas:

Símbolo	Natureza	Fluxo	Condutância
	condução	$\phi = \frac{KS}{L}(T_j - T_i)$	KS/L
	convecção	$\phi = hS(T_j - T_i)$	hS
	tr. massa	$\phi = \dot{m}\, c_p (T_j - T_i)$	$\dot{m}\, c_p$
	radiação	$\phi = \varepsilon_i \alpha_j S F_{ij} \sigma (T_j^4 - T_i^4)$	$\varepsilon_i \alpha_j S F_{ij} \sigma \cdot (T_j^2 + T_i^2)(T_j + T_i)$


Condutância não dependete


Condutância fluida


Condutância dependente

<u>Determinação das condutâncias condutivas</u>

Condutância $\longrightarrow$ linhas de fluxo

Levando ao extremo, podemos dizer que para determinar as condutâncias, é necessário conhecer a solução do problema:

- Malha fina nas regiões de gradientes elevados
- Decomposição nodal baseada nas linhas de fluxo

Cálculo das condutâncias de condução em geometrias elementares:

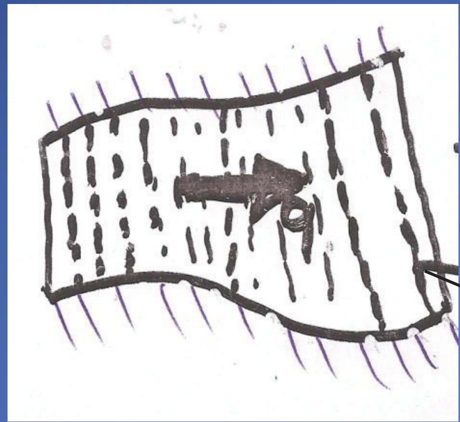
- Placa plana
- Tronco de cone
- Cilindros
- Esferas
- Trapézios

Hipóteses: estrutura do escoamento termocinético conhecido e fluxo conservativo

T1> T2

EX:

T_1



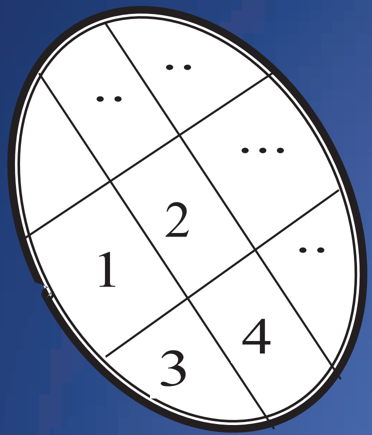
T_2

$T_1 \rangle T_2$

isótermos

Equação de balanço nodal

$$\underbrace{Ci\frac{\partial Ti}{\partial t}}_{\text{Taxa de Variação da Energia Interna}} = \underbrace{\sum_{j} G^{C}ij\left(Tj = Ti\right) + \sum_{K} G^{r}ik\left(T_K - Ti\right)}_{\text{Balanço de fluxos no nó}} + \underbrace{Qi(t)}_{\text{Fonte}}$$



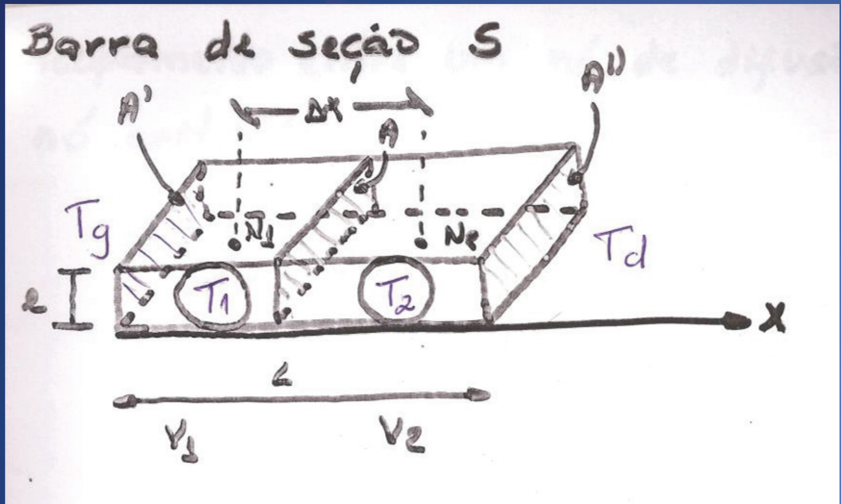
$$\begin{cases} C_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial t} = Giz(T_2 - T_1) + \ldots\ldots \\ C_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial t} = Giz(T_1 - T_2) + G_{23}(T_3 - T_2) + \ldots\ldots \end{cases}$$

Sistemas de eq. Álgebro-diferenciais acoplado e não-linar

MODELO – conjunto de equações que representam a fenomenologia

SIMULAÇÃO – resolução deste conjunto de equações

Barra de seção S



Condução 1D estacionário:

$$T_2 \rangle T_1$$
$$V_1 centro N_1$$
$$V_2 centro N2$$

Condução 1D estacionário:

$$T(x) = Tg + \frac{Td - Tg}{2\Delta X} x = \frac{T_2 - T_1}{\Delta X}\left(X - \frac{\Delta X}{2} \right)$$

Acomplamento entre N¹ e N²

$$\left.\begin{aligned}\phi &= \int_A KgradT\partial s \\ \phi &= KS\frac{T2-T1}{\Delta X} \\ \phi &= KS\Delta T\end{aligned}\right\} G = \frac{KS}{\Delta X}$$

A expressão de G é exata somente para estas condições de contorno.

Para outras configurações ela é aproximada.

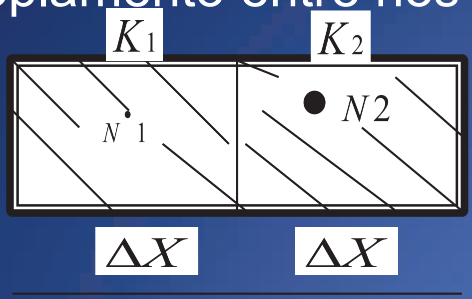
Acoplamento entre um nó de difusão e um nó aritmético:

$$\left.\begin{aligned}\phi &= \int_A KgradT\partial s \\ \phi &= G'\Delta T\end{aligned}\right\} G' = \frac{\int_A KgradT\partial S}{\Delta T}$$

$$\int_A KgradT = K\frac{TZ-T\partial}{\Delta X/Z}S$$

$$G' = \frac{K\dfrac{TZ-T\partial}{\Delta X/Z}S}{Tz-T\partial} = \frac{ZKS}{\Delta X} = ZG$$

Acoplamento entre nós de difusão com materiais diferentes



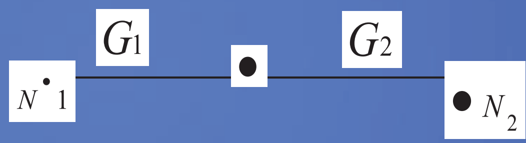
Nós de difusão N1, N2

Nó aritmético d

Considerando que existe conservação de fluxo:

$$\phi = G_1(T_\partial - T_1) = G2(T_Z - T_\partial)$$

$$G_1 = \frac{2K_1S}{\Delta X}, G_2 = \frac{2K_2S}{\Delta X}$$

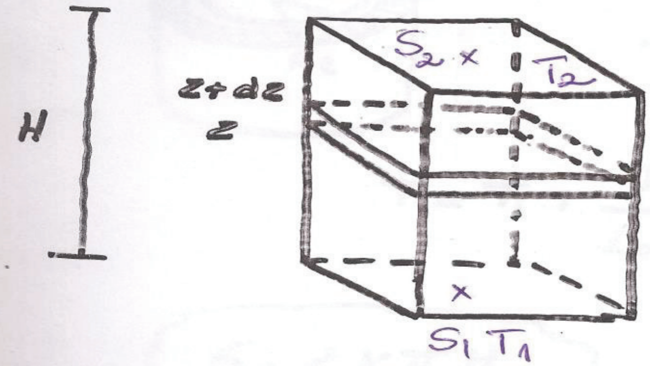


$$\begin{cases} T_Z - T_2 = \phi / G_2 \\ T_\partial - T_1 = \phi / G_1 \end{cases}$$

$$T2 - T1 = \phi\left(\frac{1}{G1} + \frac{1}{G2}\right) = \frac{\phi}{G12}$$

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$$

Acoplamento entre nós aritméticos: Cálculo de uma resistência 3D



<u>Hipótese</u> : Fluxo de calor conservativo. Não existem perdas laterais

$$G = \frac{\phi}{T_2 - T_1}$$

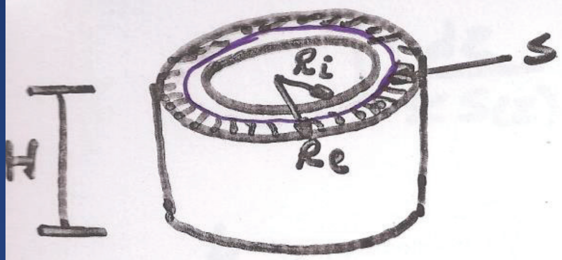
$$\phi = K S_{(z)} \frac{dT}{dz}$$

$$dT = \phi \frac{dz}{K S_{(z)}} \Rightarrow T_2 - T_1 = \phi \int \frac{dz}{K S_{(z)}}$$

$$G = \frac{1}{\int \frac{dz}{K S_{(z)}}}$$

No caso da figura acima: $G = \dfrac{KS\circ}{H}$

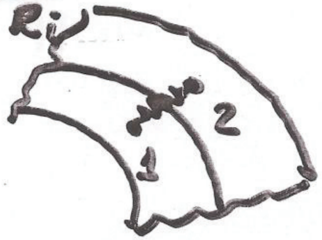
Coordenadas cilíndricas



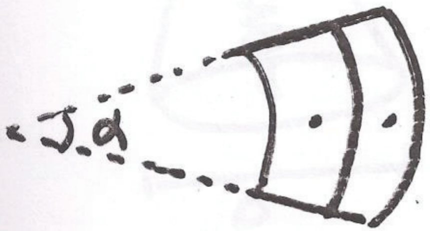
$T_i \rightarrow$ temperatura interno

$T_e \rightarrow$ temperatura externo

$$T = T_i + \frac{T_e - T_i}{\log \frac{R_e}{R_i}} \log \frac{R}{R_i}$$

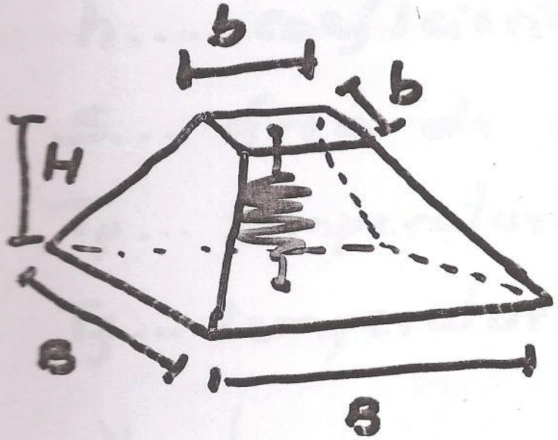


$$\boxed{G = \frac{2K\pi H}{\log \frac{R_2}{R_1}}}$$

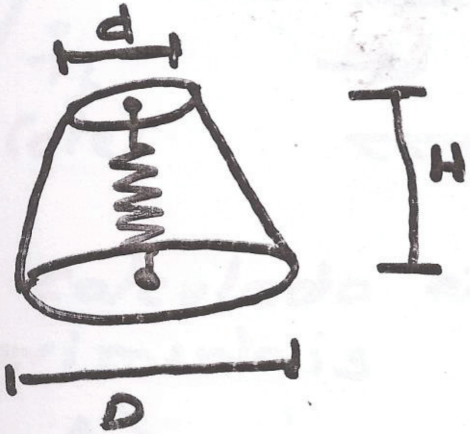


$$\boxed{G = \frac{\alpha K H}{\log \frac{R_2}{R_1}}}$$

$$G = \frac{1}{\int \frac{dz}{KS(z)}}$$



$$G = \frac{KbB}{H}$$



$$G = \frac{K\pi dD}{4H}$$

Determinação das condutâncias convectivas

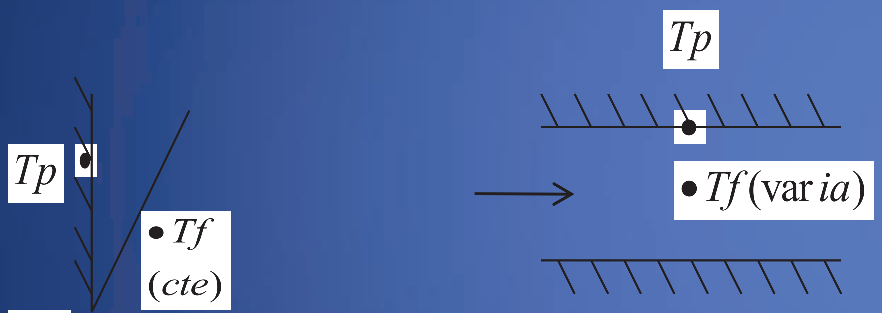
$\phi = hs(Tp - Tf)$

$h\ldots$ coeficiente de película

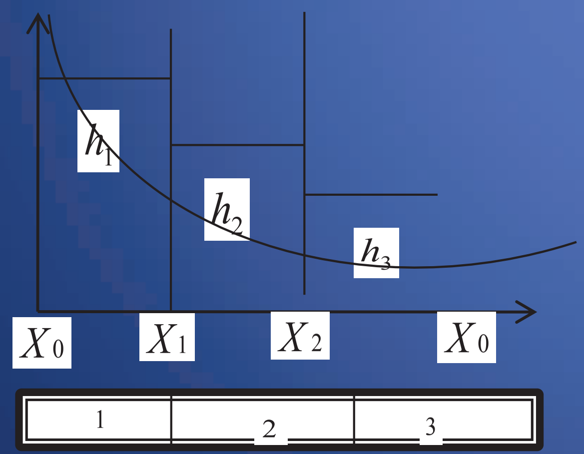
$S\ldots$ área de contato

$Tp\ldots$ temperatura da interface sólido/fluído

$Tf\ldots$ temperatura do fluído



$h\ldots$ é calculado através de correlações experimentais



Conhecendo-se a variação de $h\ldots$ com $h\ldots$

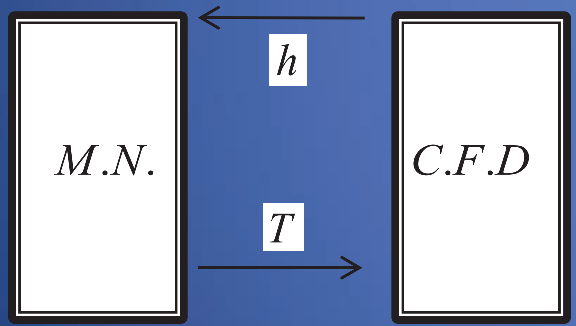
Calcula-se h_1, h_2 e h_3 como os valores médios entre $X_0 - X_1, X_1 - X_2, X_2 - X_3$

Nota importante:

O método nodal só pode ser utilizado em problemas onde h é conhecido. Caso isto não seja possível, várias estratégias devem ser adotadas:

- Buscar uma configuração aproximada on h possa ser estimado e em seguida fazer uma análise de sensibilidade.

- Acoplar um modelo baseado no M.N. a uma técnica de modelagem fina do escoamento (programas de C.F.D.)



Transferência de condições de contorno.

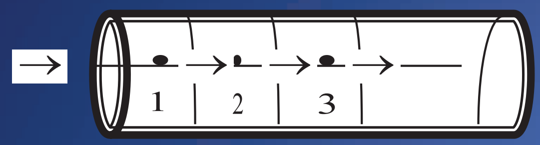
h dependente da temperatura:

$$\boxed{G = h(T)S}$$

não linearidade

Só são importantes quando existem grandes variações de temperatura.

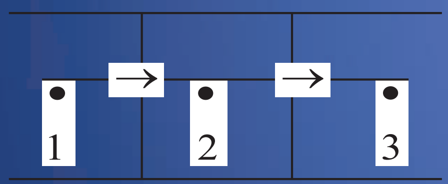
Determinação das condutâncias fluidos



Nó 1 está acoplado ao nó 2 mas nó 2 <u>não</u> está acoplado ao nó 1

Hipóteses:

- fluidos incompressível
- não há dissipação viscosa
- não há difusão de calor no sentido de escoamento



Entalpia entrando no nó 2 no intervalo de Δt

$$H_{1 \to 2} = \rho C p S u \partial t T_1$$

$$\dot{m}$$

Entalpia deixando o nó 2

$$H_{2 \to 3} = \rho C p S u \partial t T_2$$

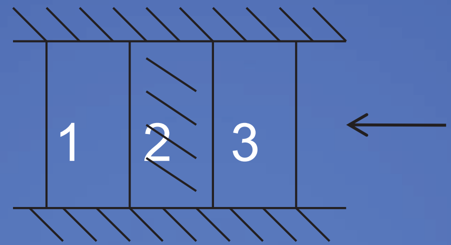
$$\dot{m}$$

Balanço energético em Z:

$$\phi = 4_{1\to2} - H_{2\to3} = \dot{m}\,Cp(T_1 - T_2)$$

ou $G = \dot{m}\,Cp$

$$\phi_2 = \dot{m}\,Cp(T_1 - T_2)$$



$$\phi_2 = \dot{m}\,Cp(T_3 - T_2)$$

Exemplo:

Gc – condução /convecção

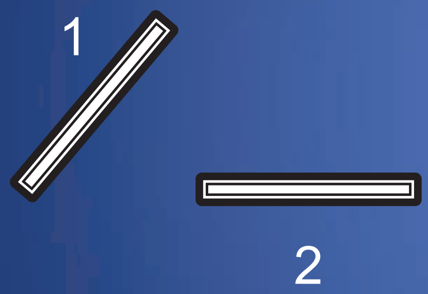
Gf – Tr. de massa

Determinação das condutâncias radiativas

$$\phi = \xi_1 \alpha_2 T S_1 F_{1-2} \left(T_2^4 - T_1^4\right)$$

$$\phi = \underbrace{\xi_1 \alpha_2 T S_1 F_{1-2} \left(T_1^2 + T_2^2\right)\left(T_1 + T_2\right)}_{G_{12}^{r}}\left(T_1 - T_2\right)$$

$G_{12}^{r} \rightarrow$ bastante não linear (condutância dependente)



$$\begin{cases} C_1 \dot{T}_1 = G_{12}^{r}\left(T_2 - T_1\right) \\ C_1 T'_2 = G_{12}^{r}\left(T_1 - T_2\right) \\ G_{12}^{r} = \xi_1 \alpha_2 T S_1 F_{1-2}\left(T_1^2 + T_2^2\right)\left(T_1 + T_2\right) \end{cases}$$

As condutâncias radiativas devem ser estimadas no processo iterativo.

Portanto temos apenas 2 nós mas um sistemas de 3 eq. a 3 incógnitas.

Integração das equações de balanço

$$Ci\frac{dTi}{dt}=\sum_j G_{ij}^{c}(Tj-Ti)+\sum_K G_{IK}^{r}(T_K-T_I)+Q_i(t)$$

Noção de constante d tempo de um nó:

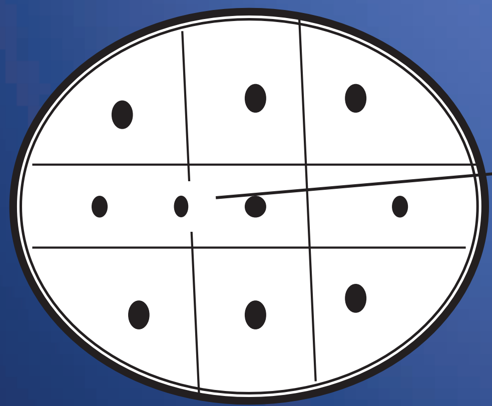
$$Ci=\frac{Ci}{\sum G}$$

$Ci.....$ inércia térmica do nó

$\sum G....$ quanto o nó i está acoplado aos seus vizinhos

Ct_i representa a taxa de variação da temperatura do nó i no tempo.

* A constante de tempo que determina o passo de integração é a menos das constantes de tempo do modelo.



$$Ct_1=\frac{C_1}{\sum G}$$

$$Ct_2=\frac{C_2}{\sum G}$$

$$Ctn=\frac{Cn}{\sum G}$$

pesso integração $\longrightarrow$ é determinado por ct2

Método explicito versus método implícito

$$Ci\frac{dTi}{dt} = \sum_j G_{ij}^c(Tj - Ti) + \sum_K G_{IK}^r(T_K - T_I) + Q_i(t)$$

Simular um modelo significa integrar no tempo um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Método explicito:

$$Ci\frac{T_i^{t+\Delta t} - T_i^t}{dt} = \sum_j Gij\left(T_j^t - T_i^t\right) + \sum_K G_{IK}^r(T_K - T_I) + Q_i(t)$$

Incógnita $\longrightarrow$ $\boxed{\overset{t+\Delta t}{Ti}}$

Portanto ao lado direito da equação é conhecido as equações são desacopladas

Vantagem $\longrightarrow$ fácil de ser implementado

Desvantagem $\longrightarrow$ passo de integração limitado

$$\Delta t \leq \min(cti)$$

Método implícito:

$$Ci\frac{T_i^{t+\Delta t}-T_i^t}{\Delta t}=\sum_j Gij\left(T_j^{t+\Delta t}-T_i^{t+\Delta t}\right)+\sum_K G_{IK}\left(\overset{t+\Delta t}{TK}-\overset{t+\Delta t}{Ti}\right)+Qi$$

Incógnitas $\longrightarrow$ $\overset{t+\Delta t}{Ti}, \overset{t+\Delta t}{Tj}, \overset{t+\Delta t}{T_K}$

- lado direito não é conhecido
- equações acopladas
- para cada passo de tempo são necessárias iterações

Vantagem $\longrightarrow$ passo de integração flexível não há a restrição $\Delta t \leq \min(cti)$

Desvantagem $\longrightarrow$ implementação mais complexa

Métodos diretos são pouco usados devido ao tempo e memória necessários na inversão das matrizes+ usadas métodos iterativos :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Jacob}\\ \text{Gauss-Seidl}\\ \text{A.D.I.}\end{array}\right.$$

Método de Crank-Nicholson (semi-implícito)

$$Ci\,\frac{T_i^{t+\Delta t}-T_i^t}{\Delta t}=\sum_j Gij\left(T_j^{t+\frac{\Delta t}{2}}-T_i^{t+\frac{\Delta t}{2}}\right)+\cdots$$

Onde $T_i^{t+\frac{\Delta t}{2}}=\left(T_j^t+T_i^{t+\Delta t}\right)Z$

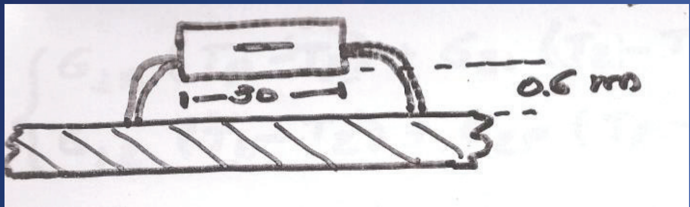
$$Ci\,\frac{T_i^{t+\Delta t}-T_i^t}{\Delta t}=\underbrace{\sum_j \frac{Gij}{Z}\left(T_j^t-T_i^t\right)}_{\text{Parte explícita}}+\underbrace{\sum_j \frac{Gij}{Z}\left(T_j^{t+\Delta t}-T_i^{t+\Delta t}\right)}_{\text{parte implícita}}+\ldots.$$

Vantagem $\longrightarrow$ passo de integração grandes incondicionalmente estável

Desvantagem $\longrightarrow$ equações acopladas, difícil implementação

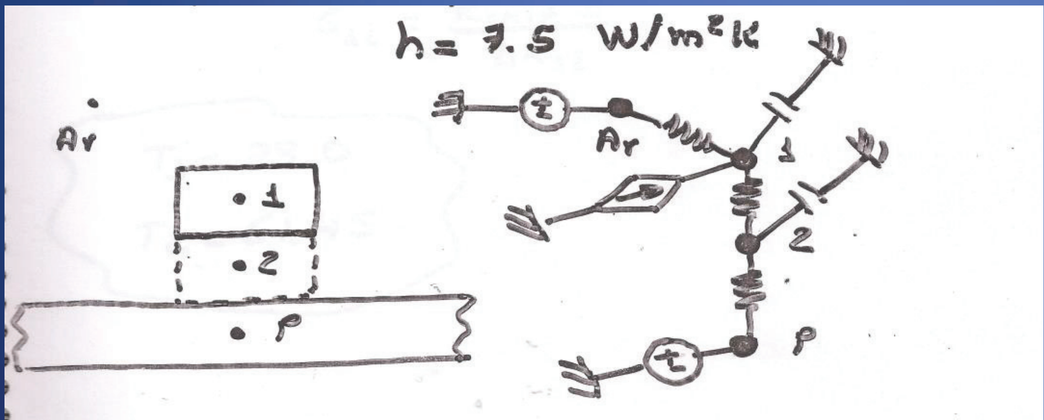
CONVERGÊNGIA $\longleftrightarrow$ PRECISÃO

Exemplo de aplicação:



Hipóteses:

- Condução pelas pernas desprezível
- Temperatura da placa conhecida Tp=44°C
- Camada de ar imóvel sob o chip
- Temperatura ambiente Ta = 20°C
- Dissipação Qc = 0.5W
- Resfriamento por conv. nat.



$$C_1\dot{T}_1 = G_{1A}(T_A - T_1) + G_{2l}(T_2 - T_1) + Q$$

$$C_1\dot{T}_2 = G_{lz}(T_1 - T_2) + G_{2p}(T_p - T_2)$$

Se regime permanente:

$$\begin{cases} G_{1A}(T_A - T_1) + G_{2I}(T_2 - T_1) + Q = 0 \\ G_{1Z}(T_1 - T_2) + G_{2P}(T_P - T_Z) = 0 \end{cases}$$

Incógnitas

$$\begin{cases} A^{\bullet} \\ i \begin{matrix} \bullet 1 \\ \bullet 2 \end{matrix} \end{cases}$$

$$G_{1A} = hS$$

$$G_{12} = \frac{Gzi \bullet G_1 i}{Gzi + G_1 i}$$

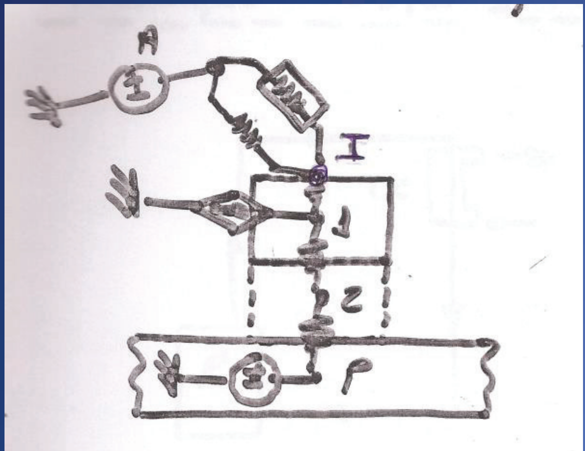
$$Gzi = \frac{K_{Ar}.S}{\Delta Zi} = \Delta.02$$

$$G_1 i = \frac{K_{chip}.S}{\Delta X1i} = S$$

$$T_1 = 79.0$$

$$T_2 = 61.45$$

Introduzindo radiação



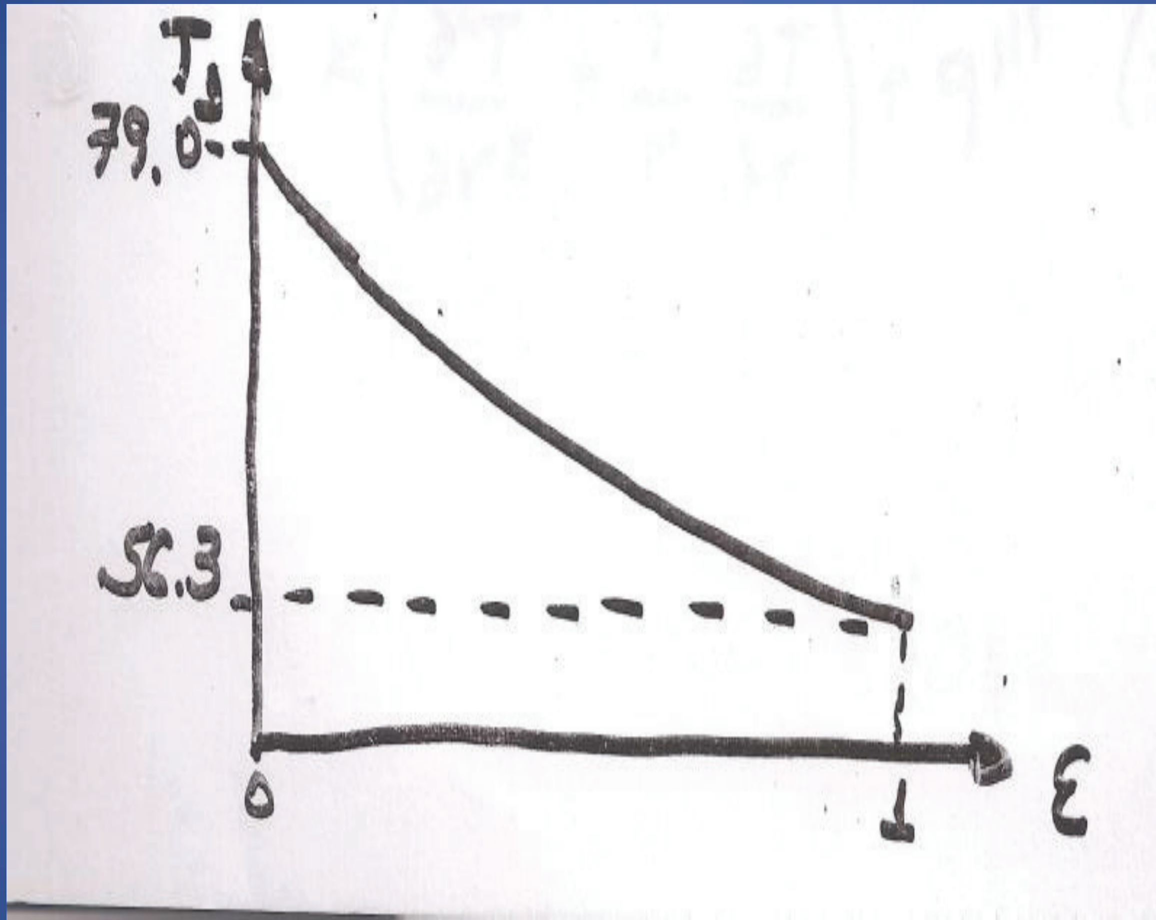
$$\begin{cases} G_{1I}(T_I - T_1) + G_{1Z}(T_2 - T_1) + Q = 0 \\ G_{1Z}(T_1 - T_2) + G_{1P}(T_P - T_2) = 0 \\ G_{1I}(T_1 - T_I) + G^{c}{}_{1A}(T_A - T_I) + G^{r}_{IA}(T_A - T_I) = 0 \end{cases}$$

$$G^{r}_{IA} = \xi_1 \alpha_2 TSF_{12}\left(T_A^Z + T_I^Z\right)\left(T_A + T_I\right)$$

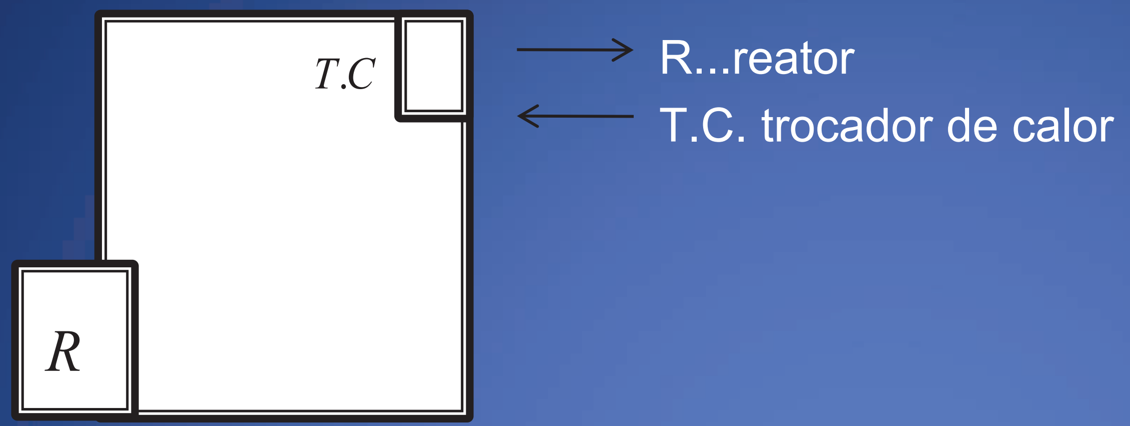
$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= 1 \\ \alpha_Z &= 1 \\ F_{12} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= 56.33 \\ T_2 &= 50.14 \\ T_I &= 55.82 \end{aligned}$$

Análise de sensibilidade a ξ_1



Circulação natural – modelagem



Hipóteses:

- Escoamento uni-dimensional
- Incompressível
- Propriedades termo-físicas constantes (exceto ?)

Equações de conservação

$$\rho \circ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{du}{\partial S} = -\frac{\partial P}{\partial S} - \frac{\partial 6}{\partial S} + \underbrace{\rho g\vec{e}_3\vec{e}g}_{\text{força do empuxo}}(fluídos)$$

$$\rho Cp\frac{\partial t}{\partial t} + \rho Cpu\frac{dT}{\partial S} = q'''(fluídos)$$

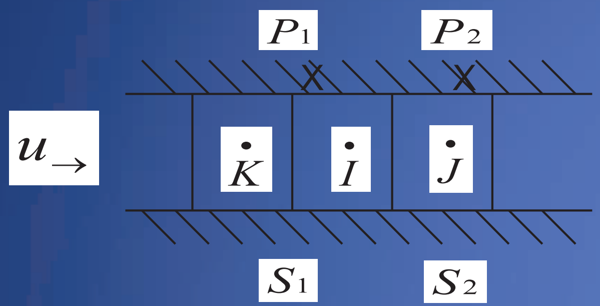
$$\rho Cp\frac{\partial t}{\partial t} + K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \Gamma^z} + \frac{\mathrm{I}}{\Gamma}\right) + q'''(Tubos)$$

Hipótese de Boussinesq:

$$\rho = \rho_{\circ}\left(1-\beta\left(T-T_{\circ}\right)\right)$$

*este termo acopla as equações de Q.M. e balanço de energia

Integração da equação de bal. de energia:

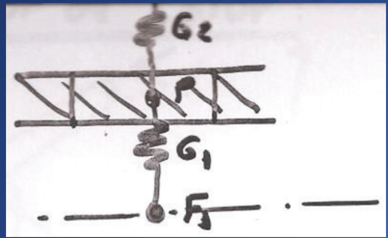


$$\underbrace{\int_{VI} \rho Cp \frac{\partial T}{\partial t}\, dv}_{\rho Cp V_I \frac{\partial T}{\partial t}} = \underbrace{-\int_{VI} \rho Cpu \frac{\partial T}{\partial S}\, dv}_{-\rho Cp\, uA\left(T_{S_2} - T_{S_1}\right)} + \underbrace{\int_{VI} q''' dv}_{q''' V_I}$$

$$T_{S_2} \rightarrow T_I \qquad T_{S_1} \rightarrow T_K$$

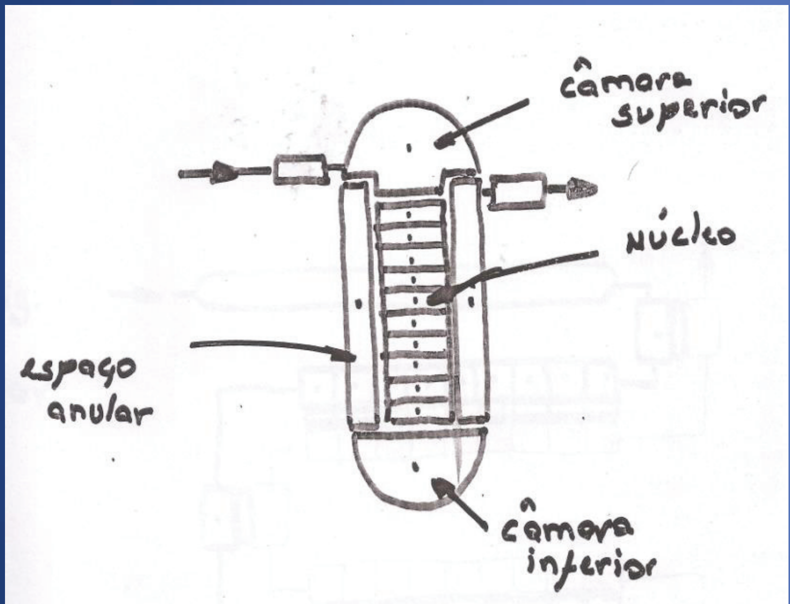
$$\rho Cp V_I \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{m}\, Cp\left(T_K - T_I\right) + hS\left(T_{P_1} - T_I\right) + Q$$

Tubos



$$\rho Cp V_P \frac{\partial T}{\partial t} = G_1(T_{F1} - T_P) + G_2(Tf_2 - T_P)$$

Representação nodal do reator:



Espaço anular e câmaras:

$$Cp \frac{DtP}{DT} = `mCp(Tj - Tp)$$

Núcleo:

$$Cp \frac{dTp}{dt} = `mCp(Tj - Tp) + Q$$

Fluxo de Calor em proveniência das varetas combustíveis.

Trocador de Calor :