

**PQI-5884 - Programação Inteira Mista aplicada à  
Otimização de Processos  
3º Período 2020**

Data	Atividade	Conteúdo
17/09	Aula 1	Introdução, formulação, classes, representação
24/09	Aula 2	Condições de otimalidade
01/10	Aula 3	Condições KKT, multiplicadores
08/10	Aula 4	Otimização irrestrita
15/10	Aula 5	LP
<b>22/10</b>	<b>Aula 6</b>	<b>NLP</b>
29/10	Aula 7	MILP
05/11	Aula 8	MILP, problemas clássicos
12/11	Aula 9	MILP, problema de scheduling
19/11	Aula 10	MINLP, problema de síntese
26/11	Aula 11	Apresentações
03/12	-	-

**OTIMIZAÇÃO MULTIVARIÁEL COM RESTRIÇÕES**

**I) PROGRAMAÇÃO LINEAR (LP) pág. 52**

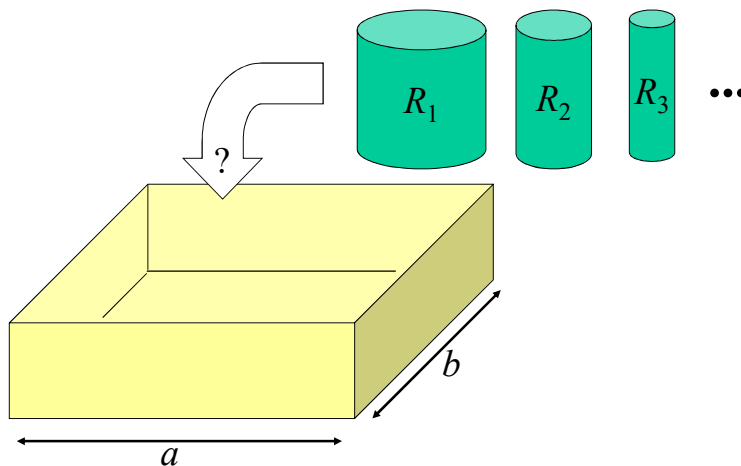
- Simplex
- Ponto-Interior

**II) PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR (NLP) pág. 69**

- Multiplicadores de Lagrange
- Programação Linear Sucessiva (SLP)
- Gradiente Reduzido Generalizado (GRG)
- Programação Quadrática Sucessiva (SQP)

**Programação Não-Linear (NLP: Non-Linear Programming)**  
**EXEMPLO pág.70**

Quais as dimensões ótimas de uma caixa retangular para guardar  $N$  cilindros com raios  $R_i$  ( $i = 1 \dots N$ )? Como ordenar os cilindros na caixa?



3

Variáveis:

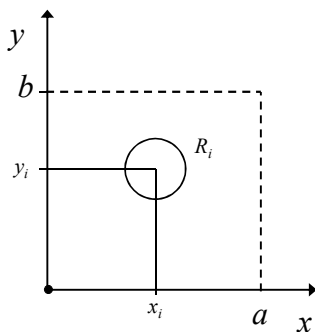
$a$  = dimensão  $x$  da caixa (m)

$b$  = dimensão  $y$  da caixa (m)

$x_i$  = posição  $x$  do centro do cilindro  $i$  (m)

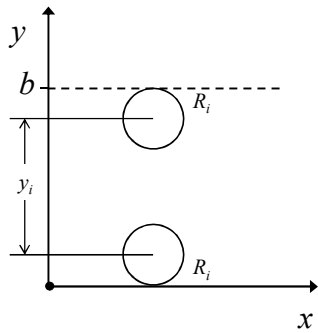
$y_i$  = posição  $y$  do centro do cilindro  $i$  (m)

$d_{ij}$  = distância entre os centros dos cilindros  $i$  e  $j$  (m)

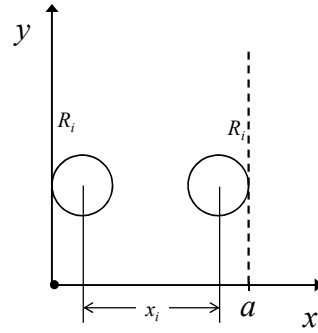


Restrições:

$$\begin{aligned} y_i &\geq R_i \\ y_i &\leq b - R_i \end{aligned}$$



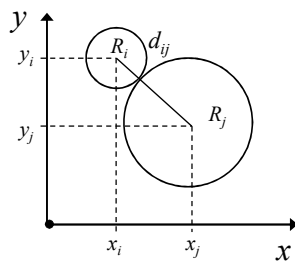
$$\begin{aligned} x_i &\geq R_i \\ x_i &\leq a - R_i \end{aligned}$$



Restrições:

$$d_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

$$d_{ij} \geq (R_i + R_j)$$



Formulação NLP:

$$\begin{aligned} \min \quad & f = a \cdot b \\ \text{s.a.:} \quad & d_{ij}^2 - (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 = 0 \quad \forall (i,j)_{i < j} \\ & R_i - x_i \leq 0 \quad \forall i \\ & x_i - a + R_i \leq 0 \quad \forall i \\ & R_i - y_i \leq 0 \quad \forall i \\ & y_i - b + R_i \leq 0 \quad \forall i \\ & R_i + R_j - d_{ij} \leq 0 \quad \forall (i,j)_{i < j} \\ & a, b, x_i, y_i, d_{ij} \geq 0, \in \mathfrak{R}^1 \end{aligned}$$

Parâmetros: raios  $R_i$

### Caso: Cinco cilindros com raios $R_i = 3, 4, 5, 6$ e $7$ cm

```
***** Parametros *****
scalar R3 / 3 / ;
scalar R4 / 4 / ;
scalar R5 / 5 / ;
scalar R6 / 6 / ;
scalar R7 / 7 / ;

***** Variaveis *****
FREE VARIABLES f;
POSITIVE VARIABLES X3, X4, X5, X6, X7, a, b,
                  Y3, Y4, Y5, Y6, Y7,
                  d34, d35, d36, d37, d45, d46, d47, d56, d57, d67;

***** Equações *****
EQUATIONS OBJ,
          RX3i, RX4i, RX5i, RX6i, RX7i, RX3s, RX4s, RX5s, RX6s, RX7s,
          RY3i, RY4i, RY5i, RY6i, RY7i, RY3s, RY4s, RY5s, RY6s, RY7s,
          RD34, RD35, RD36, RD37, RD45, RD46, RD47, RD56, RD57, RD67,
          DD34, DD35, DD36, DD37, DD45, DD46, DD47, DD56, DD57, DD67;
```

```

OBJ.. f =E= a*b ;

RX3i.. R3 - X3 =L= 0 ;
RX4i.. R4 - X4 =L= 0 ;
RX5i.. R5 - X5 =L= 0 ;
RX6i.. R6 - X6 =L= 0 ;
RX7i.. R7 - X7 =L= 0 ;
RX3s.. X3 - a + R3 =L= 0 ;
RX4s.. X4 - a + R4 =L= 0 ;
RX5s.. X5 - a + R5 =L= 0 ;
RX6s.. X6 - a + R6 =L= 0 ;
RX7s.. X7 - a + R7 =L= 0 ;

RY3i.. R3 - Y3 =L= 0 ;
RY4i.. R4 - Y4 =L= 0 ;
RY5i.. R5 - Y5 =L= 0 ;
RY6i.. R6 - Y6 =L= 0 ;
RY7i.. R7 - Y7 =L= 0 ;
RY3s.. Y3 - b + R3 =L= 0 ;
RY4s.. Y4 - b + R4 =L= 0 ;
RY5s.. Y5 - b + R5 =L= 0 ;
RY6s.. Y6 - b + R6 =L= 0 ;
RY7s.. Y7 - b + R7 =L= 0 ;

```

9

```

RD34.. R3 + R4 - d34 =L= 0 ;
RD35.. R3 + R5 - d35 =L= 0 ;
RD36.. R3 + R6 - d36 =L= 0 ;
RD37.. R3 + R7 - d37 =L= 0 ;
RD45.. R4 + R5 - d45 =L= 0 ;
RD46.. R4 + R6 - d46 =L= 0 ;
RD47.. R4 + R7 - d47 =L= 0 ;
RD56.. R5 + R6 - d56 =L= 0 ;
RD57.. R5 + R7 - d57 =L= 0 ;
RD67.. R6 + R7 - d67 =L= 0 ;

DD34.. power(d34,2) - power(X3-X4,2) - power(Y3-Y4,2) =E= 0 ;
DD35.. power(d35,2) - power(X3-X5,2) - power(Y3-Y5,2) =E= 0 ;
DD36.. power(d36,2) - power(X3-X6,2) - power(Y3-Y6,2) =E= 0 ;
DD37.. power(d37,2) - power(X3-X7,2) - power(Y3-Y7,2) =E= 0 ;
DD45.. power(d45,2) - power(X4-X5,2) - power(Y4-Y5,2) =E= 0 ;
DD46.. power(d46,2) - power(X4-X6,2) - power(Y4-Y6,2) =E= 0 ;
DD47.. power(d47,2) - power(X4-X7,2) - power(Y4-Y7,2) =E= 0 ;
DD56.. power(d56,2) - power(X5-X6,2) - power(Y5-Y6,2) =E= 0 ;
DD57.. power(d57,2) - power(X5-X7,2) - power(Y5-Y7,2) =E= 0 ;
DD67.. power(d67,2) - power(X6-X7,2) - power(Y6-Y7,2) =E= 0 ;

```

```

***** Solução *****
MODEL Problema / ALL / ;
SOLVE Problema USING NLP MINIMIZING f;
*****

```

10

```

S O L V E      S U M M A R Y

      MODEL   Problema          OBJECTIVE   f
      TYPE    NLP              DIRECTION   MINIMIZE
      SOLVER  LINDOGLOBAL      FROM LINE  69

**** SOLVER STATUS      1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      2 Locally Optimal
**** OBJECTIVE VALUE          612.6904

RESOURCE USAGE, LIMIT          0.094      1000.000
ITERATION COUNT, LIMIT      313      2000000000
EVALUATION ERRORS          NA          0

LINDO          24.2.1 r43572 Released Dec  9, 2013 WEI
x86_64/MS Windows

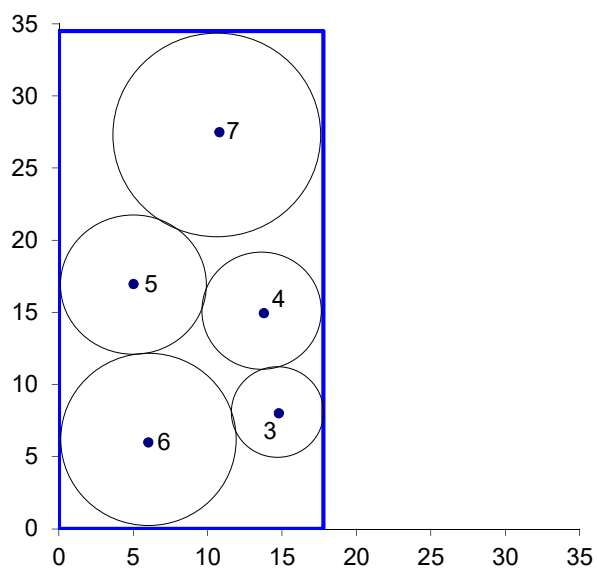
      LINDO Driver
      Lindo Systems Inc, www.lindo.com
    
```

```

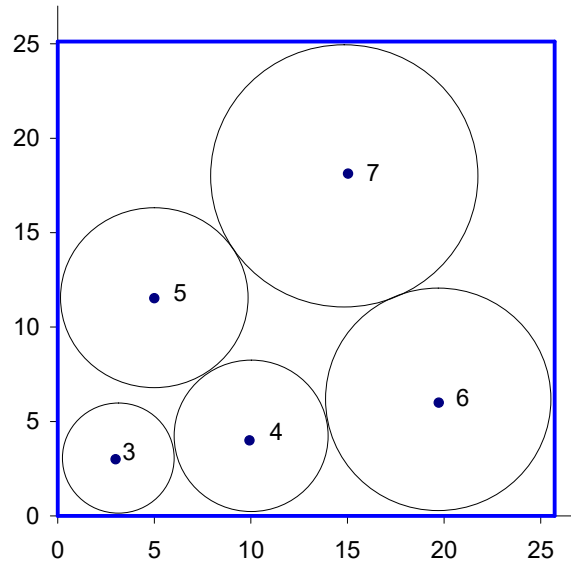
      LOWER      LEVEL      UPPER      MARGINAL
---- EQU OBJ          .          .          .          1.000
---- EQU RX3i        -INF      -14.772     -3.000          .
---- EQU RX4i        -INF      -13.772     -4.000          .
---- EQU RX5i        -INF      -5.000     -5.000     -23.476
---- EQU RX6i        -INF      -6.000     -6.000    -10.999
---- EQU RX7i        -INF     -10.772     -7.000          .
---- EQU RX3s        -INF      -3.000     -3.000    -12.772
---- EQU RX4s        -INF      -4.000     -4.000    -11.953
---- EQU RX5s        -INF     -12.772     -5.000          .
---- EQU RX6s        -INF     -11.772     -6.000          .
---- EQU RX7s        -INF      -7.000     -7.000     -9.750
---- EQU RY3i        -INF      -8.013     -3.000          .
---- EQU RY4i        -INF     -14.941     -4.000          .
---- EQU RY5i        -INF     -16.954     -5.000          .
---- EQU RY6i        -INF      -6.000     -6.000    -17.772
---- EQU RY7i        -INF     -27.475     -7.000          .
---- EQU RY3s        -INF     -26.462     -3.000          .
---- EQU RY4s        -INF     -19.534     -4.000          .
---- EQU RY5s        -INF     -17.521     -5.000          .
---- EQU RY6s        -INF     -28.475     -6.000          .
---- EQU RY7s        -INF      -7.000     -7.000    -17.772
---- EQU RD34        -INF      -7.000     -7.000     -2.867
---- EQU RD35        -INF     -13.245     -8.000          .
---- EQU RD36        -INF      -9.000     -9.000    -12.684
---- EQU RD37        -INF     -19.869    -10.000          .
---- EQU RD45        -INF      -9.000     -9.000    -12.684
---- EQU RD46        -INF     -11.847    -10.000          .
---- EQU RD47        -INF     -12.888    -11.000          .
---- EQU RD56        -INF     -11.000    -11.000    -14.997
---- EQU RD57        -INF     -12.000    -12.000    -20.271
---- EQU RD67        -INF     -21.999    -13.000          .
---- EQU DD34          .          .          .     -0.205
---- EQU DD35          .          .          .          EPS
---- EQU DD36          .          .          .     -0.705
---- EQU DD37          .          .          .          EPS
---- EQU DD45          .          .          .     -0.705
---- EQU DD46          .          .          .          EPS
---- EQU DD47          .     -3.062E-5          .          .
---- EQU DD56          .          .          .     -0.682
---- EQU DD57          .          .          .     -0.845
---- EQU DD67          .          .          .          EPS
    
```

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
---- VAR f	-INF	612.690	+INF	.
---- VAR X3	.	14.772	+INF	.
---- VAR X4	.	13.772	+INF	.
---- VAR X5	.	5.000	+INF	.
---- VAR X6	.	6.000	+INF	.
---- VAR X7	.	10.772	+INF	.
---- VAR a	.	17.772	+INF	.
---- VAR b	.	34.475	+INF	.
---- VAR Y3	.	8.013	+INF	.
---- VAR Y4	.	14.941	+INF	.
---- VAR Y5	.	16.954	+INF	.
---- VAR Y6	.	6.000	+INF	.
---- VAR Y7	.	27.475	+INF	.
---- VAR d34	.	7.000	+INF	.
---- VAR d35	.	13.245	+INF	.
---- VAR d36	.	9.000	+INF	.
---- VAR d37	.	19.869	+INF	.
---- VAR d45	.	9.000	+INF	.
---- VAR d46	.	11.847	+INF	.
---- VAR d47	.	12.888	+INF	.
---- VAR d56	.	11.000	+INF	.
---- VAR d57	.	12.000	+INF	.
---- VAR d67	.	21.999	+INF	.

**Solução  $f^* = 612,7 \text{ cm}^2$  (ótimo global?)**

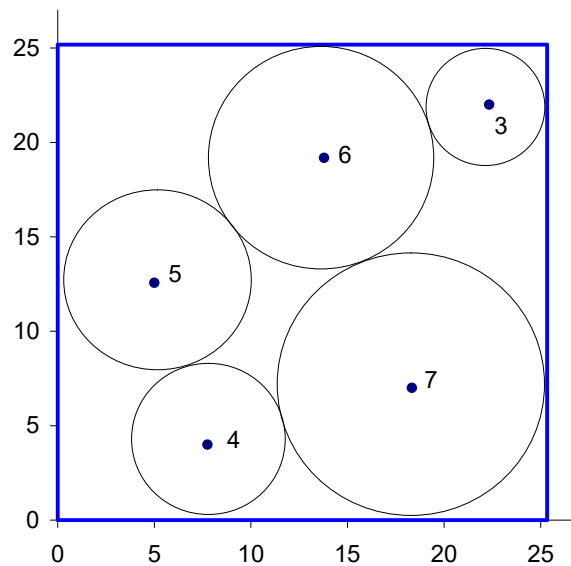


**Solução  $f^* = 646,3 \text{ cm}^2$  (ótimo local)**



15

**Solução  $f^* = 638,0 \text{ cm}^2$  (ótimo local)**



16



## Algoritmos NLP

- Multiplicadores de Lagrange
- Programação Linear Sucessiva (SLP)
- Programação Quadrática Sucessiva (SQP)
- Gradiente Reduzido Generalizado (GRG)

17

### -Programação Linear Sucessiva (SLP)

Aproximações lineares das funções em um ponto  $\underline{x}^{(k)}$

$$f(\underline{x}) \cong f(\underline{x}^{(k)}) + \nabla f(\underline{x}^{(k)}) \cdot (\underline{x} - \underline{x}^{(k)})$$

$$h_j(\underline{x}) \cong h_j(\underline{x}^{(k)}) + \nabla h_j(\underline{x}^{(k)}) \cdot (\underline{x} - \underline{x}^{(k)})$$

$$g_j(\underline{x}) \cong g_j(\underline{x}^{(k)}) + \nabla g_j(\underline{x}^{(k)}) \cdot (\underline{x} - \underline{x}^{(k)})$$

Resolve um LP com restrição de passo, sendo que o passo é

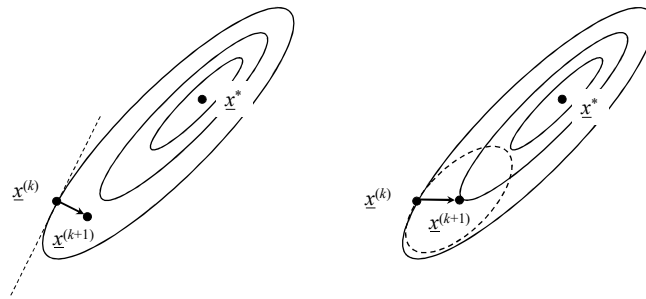
$$\underline{d}^{(k)} = \underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}$$

Verifica viabilidade e convergência

- Gradiente Reduzido Generalizado (GRG)
- Programação Quadrática Sucessiva (SQP)

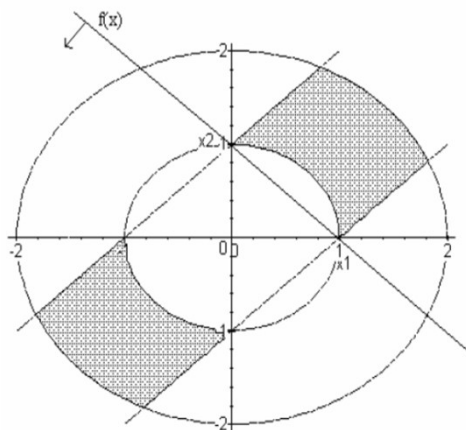
**Melhoria:** aproximação quadrática da função objetivo

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^{(k)}) + \nabla f(\underline{x}^{(k)})^T \cdot \Delta \underline{x} + \frac{1}{2} \cdot \Delta \underline{x}^T \cdot \nabla^2 f(\underline{x}^{(k)}) \cdot \Delta \underline{x}$$



Pág 75-77 – Solvers NLP

Pág. 77-80 – Testes de Solvers



20

**DIRETRIZES PARA FORMULAÇÃO DE MODELOS NLP**

$$\begin{array}{ll} \min & f(\underline{x}) \\ \text{s.a.:} & h(\underline{x}) = \underline{0} \\ & g(\underline{x}) \leq \underline{0} \\ & \underline{x} \in \mathcal{R}^n \end{array}$$

- 1) Especificar limites para as variáveis
- 2) Tentar fornecer uma boa estimativa inicial
- 3) Formular restrições lineares, sempre que possível.
- 4) Evitar descontinuidades, limitando as variáveis.
- 5) Evitar funções não diferenciáveis (derivada não contínua).

- 6) Eliminar variáveis por substituição de equações apenas:
  - Se não houver aumento de não-linearidades nas restrições.
  - Se as não linearidades puderem ser colocadas na função objetivo.
- 7) Normalizar os escalonar as variáveis e as expressões algébricas ( $f$ ,  $h$  e  $g$ ) para evitar ordens de grandeza extremas
- 8) Explorar propriedades globais do modelo quando houver a possibilidade.
- 9) Explorar a estrutura do problema se possível.
- 10) Testar diferentes solvers, quando disponíveis.
- 11) Ler o manual do solver em uso.

## Solver do Excel

Parâmetros do Solver

Definir Objetivo:

Para:  Máx.  Mín.  Valor de:

Alterando Células Variáveis:

Sujeito às Restrições:

Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas

Selecionar um Método de Solução: Evolutionary

Método de Solução  
 Selecione o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares. Selecione o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Selecione o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.

Ajuda Resolver Eechar

23



<http://www.solver.com/excel-solver-help>

### Algorithms and Methods Used

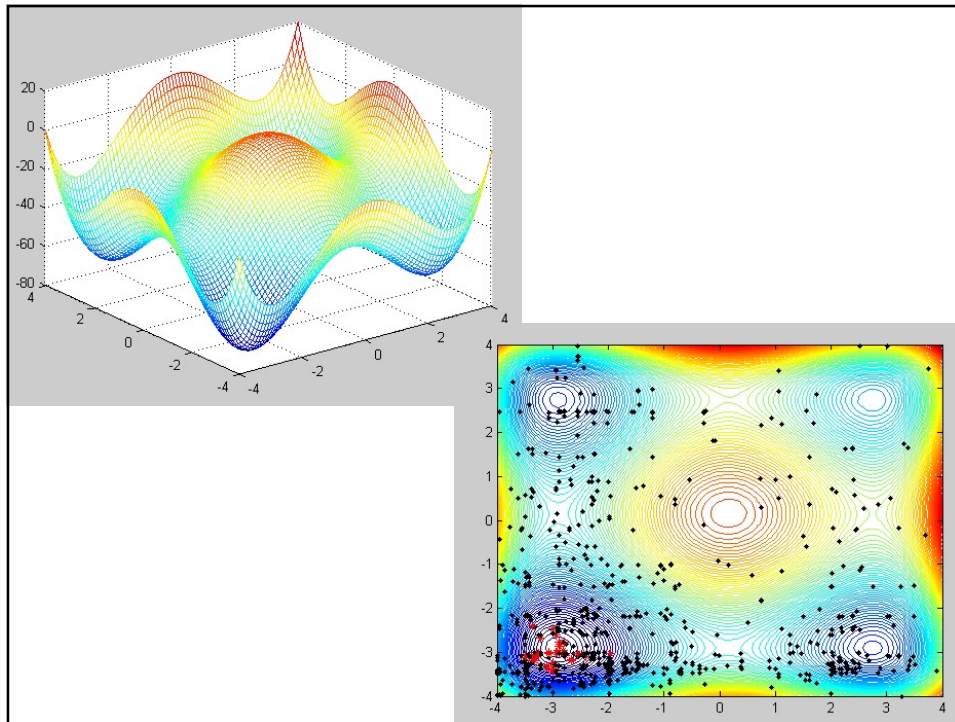
The Microsoft Office Excel Solver tool uses several algorithms to find optimal solutions.

The GRG Nonlinear Solving Method for **nonlinear optimization** uses the **Generalized Reduced Gradient (GRG2)** code, which was developed by Leon Lasdon, University of Texas at Austin, and Alan Waren, Cleveland State University, and enhanced by Frontline Systems, Inc.

The Simplex LP Solving Method for **linear programming** uses the **Simplex and dual Simplex method** with bounds on the variables, and problems with integer constraints use the **branch and bound** method, as implemented by John Watson and Daniel Fylstra, Frontline Systems, Inc.

The Evolutionary Solving Method for **non-smooth optimization** uses a variety of **genetic algorithm** and local search methods, implemented by several individuals at Frontline Systems, Inc.

24



**Opções**

Todos os Métodos | GRG Não Linear | Evolutionary

Precisão da Restrição: 0,000001

Usar Escala Automática

Mostrar Resultados de Iterações

Resolvendo com Restrições de Números Inteiros

Ignorar Restrições de Números Inteiros

Nível de Número Inteiro Ideal (%): 1

Resolvendo Limites

Tempo Máx. (Segundos):

Iterações:

Evolutionary e Restrições de Números Inteiros:

Subproblemas Máx.:

Soluções Viáveis Máx.:

OK Cancelar

**Opções**

Todos os Métodos | GRG Não Linear | Evolutionary

Convergência: 0,0001

Derivativos

Encaminhar  Central

Multi-inicialização

Usar Início Múltiplo

Tamanho da população: 100

Propagação Aleatória: 0

Limites Necessários em Variáveis

OK Cancelar

