# Aula 8
# Cálculo das Perdas de Carga na Equação da Energia

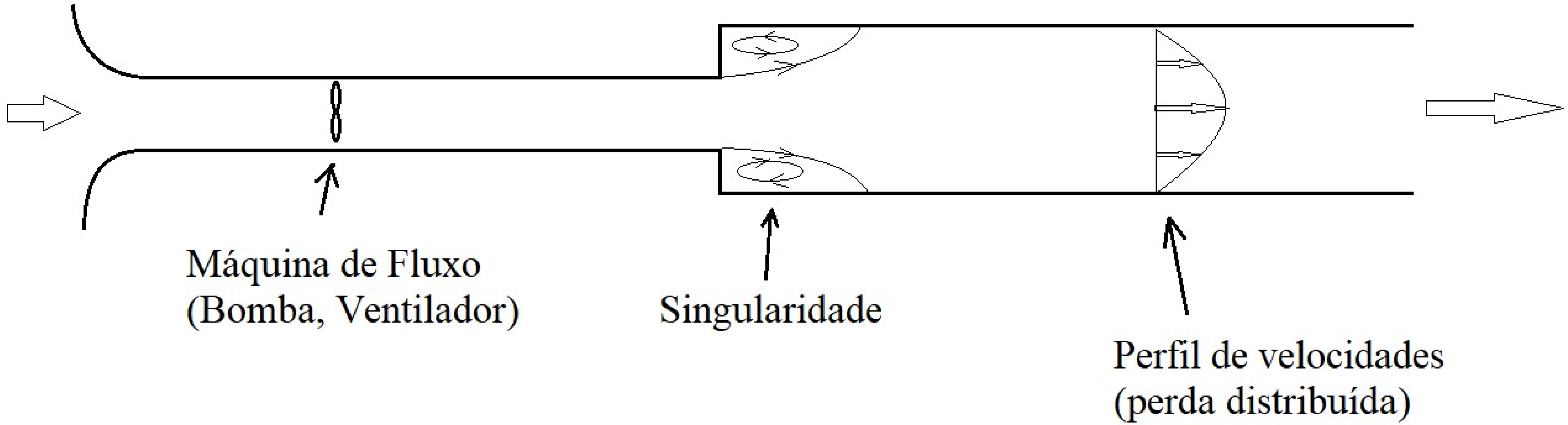
1)Equação da Energia e Perda de Carga

Como vimos, a equação da energia pode ser escrita como:

$$\boxed{\left(\alpha_2 \frac{{V_2}^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2\right) - \left(\alpha_1 \frac{{V_1}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1\right) = \frac{\dot{W}_m}{\gamma Q} - \text{perdas}}$$

Portanto, a determinação da perda de carga é fundamental para a seleção de uma máquina de fluxo adequada para a instalação.

As perdas de carga podem ser de dois tipos:
a)Perda de carga distribuída causada pelo atrito viscoso ao longo de trechos retos de um conduto;
b)Perda de carga singular (ou localizada) em elementos da instalação como cotovelos, mudanças de área de seção, válvulas, etc.




Os gradientes de velocidade do perfil desenvolvido nos trechos retos do conduto causam o aparecimento de tensões viscosas que provocam dissipação de energia mecânica na forma de calor.

Já singularidades em geral causam o aparecimento de regiões de recirculação localizadas com altos gradientes de velocidade relacionados com as inversões do perfil de velocidade. Esse efeito também causa dissipação por atrito viscoso.

2)Perda de Carga Distribuída

É calculada pela equação de Darcy-Weisbach:

$$\boxed{h_f = f\,\frac{L}{D_H}\frac{V^2}{2g}}$$

Onde $L$ é o comprimento do trecho reto para o qual a perda de carga está sendo calculada, $D_H$ é o diâmetro hidráulico, usado para generalizar os resultados para condutos de seção arbitrária:

$\boxed{D_H = 4\frac{S}{P}}$ onde $S$ é a seção de escoamento e $P$ é seu o perímetro molhado.

Finalmente, $f$ é o coeficiente de atrito de Darcy.

O coeficiente de atrito ou de perda de carga distribuída é dado por:

$$f = f\left(\mathrm{Re}, \frac{\varepsilon}{D_H}\right)$$

Onde o número de Reynolds é dado por:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho\, V\, D_H}{\mu} = \frac{V\, D_H}{\nu}$$

E $\varepsilon$ (ou $k$ em algumas literaturas) é a rugosidade da parede interna do conduto.

A forma como f pode ser calculado depende do escoamento ser laminar $(\mathrm{Re}<2000)$ ou turbulento $\left(\mathrm{Re}>2400\right)$:

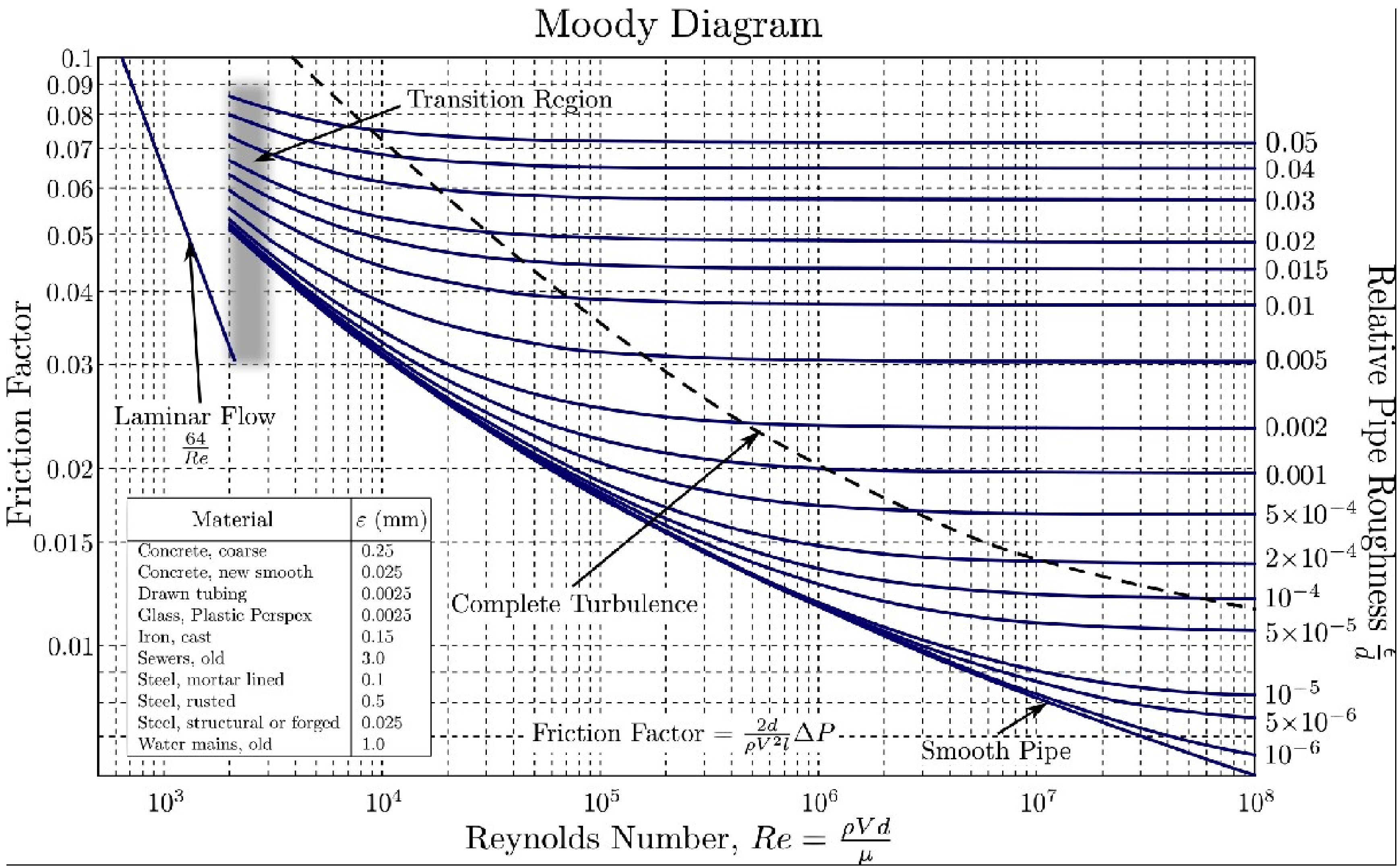
$$f=\frac{64}{\mathrm{Re}} \quad \text{para Re}<2000$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}}=-2\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/D_H}{3{,}7}+\frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \quad \text{para Re}>2400 \quad \text{(Equação de Colebrook)}$$

A equação de Colebrook tem uma solução iterativa. Uma alternativa à equação de Colebrook é a equação de Haaland:

$$\frac{1}{\sqrt{f}}=-1{,}8\log_{10}\left[\frac{6{,}9}{\mathrm{Re}}+\left(\frac{\varepsilon/D_H}{3{,}7}\right)^{1{,}11}\right]$$

O Diagrama de Moody também pode ser usado para calcular *f*:




| Material | $\varepsilon$ (mm) |
|---|---|
| Concrete, coarse | 0.25 |
| Concrete, new smooth | 0.025 |
| Drawn tubing | 0.0025 |
| Glass, Plastic Perspex | 0.0025 |
| Iron, cast | 0.15 |
| Sewers, old | 3.0 |
| Steel, mortar lined | 0.1 |
| Steel, rusted | 0.5 |
| Steel, structural or forged | 0.025 |
| Water mains, old | 1.0 |

Fonte: S. Beck e R. Collins, Universidade de Sheffield.

Os problemas de perda de carga distribuída se dividem em três categorias:

a)Dados a vazão $Q$ e diâmetro $D$ do conduto, determinar a perda de carga $h_f$;

b)Dados a perda de carga $h_f$ e o diâmetro $D$ do conduto, determinar a vazão $Q$;

c)Dados a perda de carga $h_f$ e a vazão $Q$, determinar o diâmetro $D$ do conduto.

Seguem exemplos para cada um desses problemas.

a)Determinar a perda de carga por km de comprimento de uma tubulação de aço com diâmetro $D$ = 45cm. O fluido tem viscosidade cinemática $\nu = 1{,}06 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}$. A vazão é $Q$ = 190 $\ell$/s. Considere rugosidade $\varepsilon = 0{,}045\ \mathrm{mm}$.

Solução:

A vazão é $Q$ = 0,190 $\mathrm{m^3/s}$. A área da seção é:

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi . 0{,}45^2}{4} = 0{,}159\ \mathrm{m^2}$$

A velocidade média resulta: $V = \dfrac{Q}{S} = \dfrac{0{,}190}{0{,}159} = 1{,}19\ \mathrm{m/s}$

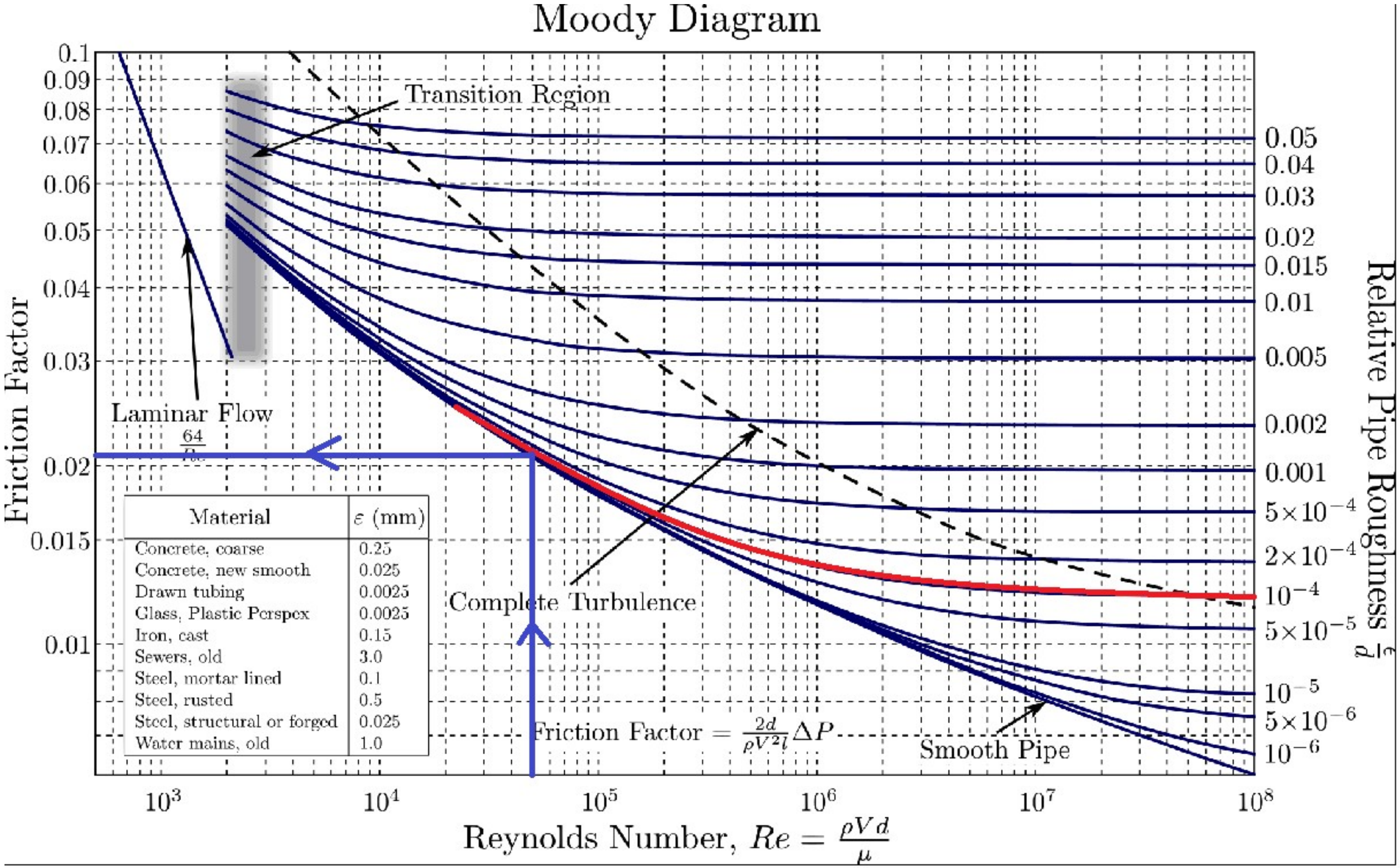
O diâmetro hidráulico $D_H$ para o cálculo do n° de Reynolds resulta o próprio diâmetro $D$ para um duto circular. Assim:

$$\mathrm{Re} = \frac{V\, D_H}{\nu} = \frac{1{,}19 . 0{,}45}{1{,}06 \times 10^{-5}} \cong 5 \times 10^{4}$$

A rugosidade relativa é:

$$\frac{\varepsilon}{D_H} = \frac{0{,}045 \times 10^{-3}}{0{,}45} = 0{,}0001$$

Vamos resolver o problema usando tanto o diagrama de Moody quanto a equação de Colebrook e a equação de Haaland.




Do diagrama de Moody, $f \cong 0{,}021$.

A equação de Colebrook fica:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/D_H}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \Rightarrow \; f = \left[-2\log_{10}\left(\frac{0{,}0001}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{5\times 10^4\sqrt{f}}\right)\right]^{-2}$$

A solução é iterativa. Usa-se um valor inicial no lado direito, dentro da raiz, e um novo valor é calculado do lado esquerdo. Esse novo valor é então colocado dentro da raiz e vai-se iterando até a convergência, em geral para três ou quatro casas depois da vírgula. Usando um valor inicial 0,0180:

| $f$ | $f_{\text{novo}}$ |
|---|---|
| 0,0180 | 0,0217 |
| 0,0217 | 0,0212 |
| 0,0212 | 0,0212 |

Da equação de Colebrook, $f \cong 0{,}021$.

Usando a equação de Haaland:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1{,}8\ \log_{10}\left[\frac{6{,}9}{\mathrm{Re}} + \left(\frac{\varepsilon / D_H}{3{,}7}\right)^{1{,}11}\right]$$

Resulta: $f = \left\{-1{,}8\ \log_{10}\left[\frac{6{,}9}{50000} + \left(\frac{0{,}0001}{3{,}7}\right)^{1{,}11}\right]\right\}^{-2} \Rightarrow f \cong 0{,}021$

Assim, a perda de carga por km de duto fica:

$$h_f = f\,\frac{L}{D_H}\frac{V^2}{2g} = 0{,}021.\frac{1000}{0{,}45}.\frac{1{,}19^2}{2.9{,}81} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h_f = 3{,}37\,\mathrm{m}}$$

b)Calcular a vazão $Q$ de um fluido com viscosidade $\nu = 0{,}7 \times 10^{-6}\,\text{m}^2/\text{s}$ num duto com diâmetro $D = 10\,\text{cm}$ se dois manômetros instalados a uma distância de 10 m um do outro, num trecho horizontal, indicam pressões de 1,5 kgf/cm$^2$ e 1,45 kgf/cm$^2$ respectivamente. O peso específico do fluido é $\gamma = 1000\,\text{kgf/m}^3$ e a rugosidade do tubo é $\varepsilon = 0{,}259\,\text{mm}$.

Solução:

Da equação da energia:

$$\left(\alpha_2 \frac{V_2^{\,2}}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2\right) - \left(\alpha_1 \frac{V_1^{\,2}}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1\right) = \underbrace{\frac{\dot{W}_m}{\gamma Q}}_{0} - \underbrace{\text{perdas}}_{h_f}$$

Como o duto tem diâmetro constante, $V_1 = V_2$. Como os perfis de velocidade provavelmente se repetem nas seções (1) e (2), temos $\alpha_1 = \alpha_2$. Assim, os termos de energia cinética são iguais. Como o duto é horizontal, $z_1 = z_2$. Assim:

$$h_f = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{1{,}5 \times 10^4 - 1{,}45 \times 10^4}{1000} = 0{,}5\,\mathrm{m}$$

Da equação da perda de carga distribuída:

$$h_f = f \frac{L}{D_H} \frac{V^2}{2g} \Rightarrow 0{,}5 = f \frac{10}{0{,}10} \frac{V^2}{2 .\ 9{,}81}$$

Isso resulta: $f V^2 \cong 0{,}1$

Multiplicando os dois lados desse último resultado por $\dfrac{D^2}{\nu^2}$:

$$f\frac{V^2D^2}{\nu^2}=\frac{0{,}1.0{,}10^2}{\left(0{,}7\times 10^{-6}\right)^2}\Rightarrow \mathrm{Re}\sqrt{f}=\frac{\sqrt{0{,}1}.0{,}10}{0{,}7\times 10^{-6}}\Rightarrow \mathrm{Re}\sqrt{f}=45175{,}4$$

Temos que $\dfrac{\varepsilon}{D_H}=\dfrac{0{,}259\times 10^{-3}}{0{,}10}=0{,}00259$

Usando a equação de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}}=-2\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/D_H}{3{,}7}+\frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right)\Rightarrow f=\left[-2\log_{10}\left(\frac{0{,}00259}{3{,}7}+\frac{2{,}51}{45175{,}4}\right)\right]^{-2}$$

Resulta $f = 0{,}0257$. Como $f V^2 = 0{,}1$, temos:

$V = 1{,}97\,\text{m/s}$

E a vazão $Q$ é dada por:

$$Q = V \frac{\pi D^2}{4} = 1{,}97 \frac{\pi . 0{,}10^2}{4}$$

Resulta:

$$\boxed{Q = 0{,}0154\,\text{m}^3/\text{s}}$$

A solução usando o diagrama de Moody e a equação de Haaland é iterativa:

Passo 0 - Admite-se um valor inicial de $f$;

Passo 1 - Calcula-se $V = \sqrt{0{,}1/f}$;

Passo 2 - Com esse valor de $V$, calcula-se Re;

Passo 3 - Com esse Re e $\varepsilon/D_H$, usa-se o diagrama de Moody ou a Equação de Haaland para calcular o novo $f$;

Passo 4 - Se o novo valor de $f$ difere do valor de $f$ usado no passo 1 acima de uma certa tolerância, retorna-se ao passo 1.

c)Calcule o diâmetro de um tubo de rugosidade $\varepsilon = 0{,}046\,\mathrm{mm}$ que deverá transportar uma vazão de $19\,\ell/\mathrm{s}$ de um fluido com viscosidade cinemática $\nu = 3\times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$ a uma distância de 600 m, com uma perda de carga $h_f = 3\,\mathrm{m}$.

Da equação da perda de carga:

$$h_f = f\,\frac{L}{D_H}\,\frac{V^2}{2g} \quad \text{onde } D_H = D$$

A velocidade $V$ é dada por:

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

Substituindo:

$$h_f = f\,\frac{L}{D^5}\,\frac{16Q^2}{2\pi^2 g}$$

Isso resulta:

$$D = \left( f\,\frac{L}{h_f}\,\frac{16Q^2}{2\pi^2 g} \right)^{0,2}$$

Substituindo os valores numéricos:

$$D = \left( f\,\frac{600}{3}\,\frac{16\,.\,0{,}019^2}{2\pi^2 .\,9{,}81} \right)^{0,2} \quad \Rightarrow \quad D = (0{,}006\,f\,)^{0,2}$$

O procedimento de solução é iterativo:

Passo 0 - Admite-se um valor inicial de *f*;

Passo 1 - Calcula-se o diâmetro de $D = (0{,}006\, f)^{0{,}2}$;

Passo 2 - Calcula-se a velocidade $V = \dfrac{4Q}{\pi D^2} = \dfrac{0{,}0242}{D^2}$

Passo 3 - Calcula-se $\mathrm{Re} = \dfrac{V\, D_H}{\nu} = \dfrac{VD}{3 \times 10^{-6}}$ ;

Passo 4 - Calcula-se a rugosidade relativa $\dfrac{\varepsilon}{D_H} = \dfrac{0{,}046 \times 10^{-3}}{D}$;

Passo 5 - Com o diagrama de Moody ou com a Equação de Haaland ou com a equação de Colebrook calcula-se o novo *f*. Se este diferir acima de uma certa tolerância do valor usado no passo 1, retorna-se ao passo1.

Admitindo-se um valor inicial $f = 0{,}0200$ e usando a equação de Haaland:

| $f$ | $D$ | $V$ | $Re$ | $\varepsilon / D_H$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0200 | 0,164 | 0,900 | 49187 | 0,000280 | 0,0217 |
| 0,0217 | 0,167 | 0,868 | 48303 | 0,000275 | 0,0217 |

Resulta:

$\boxed{D = 0{,}167\,\mathrm{m}}$

3)Perda de Carga Singular ou Localizada

Além da perda de carga distribuída, é preciso levar em contra a perda de carga causada por:

- entradas e saídas da tubulação;
- mudanças de área de seção, seja por expansão ou contração;
- válvulas;
- curvas e cotovelos;
- filtros;
- medidores e instrumentos;

Cada singularidade tem sua perda de carga calculada por:

$$\boxed{h_s = K_s \frac{V^2}{2g}}$$

onde $K_s$ é o coeficiente de perda de carga singular.

O coeficiente $K_s$ é inerente à singularidade e em geral é determinado experimentalmente. Segue uma tabela com alguns coeficientes.

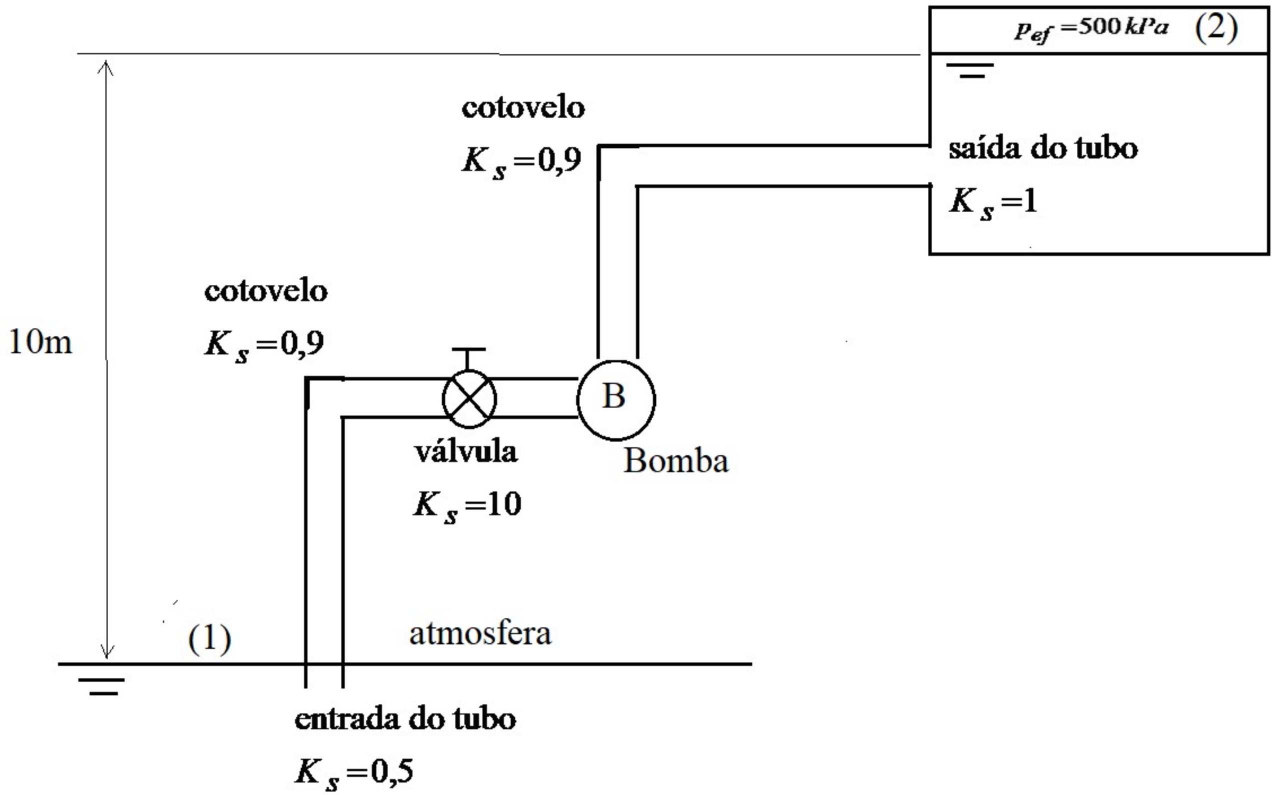
| Peça | $K_s$ | Peça | $K_s$ |
|---|---|---|---|
| Ampliação gradual | 0,30* | Junção | 0,40 |
| Bocais | 2,75 | Medidor Venturi | 2,50** |
| Comporta aberta | 1,00 | Redução gradual | 0,15* |
| Controlador de vazão | 2,50 | Válvula de ângulo aberto | 5,00 |
| Cotovelo de 90° | 0,90 | Válvula de gaveta aberto | 0,20 |
| Cotovelo de 45° | 0,40 | Válvula de globo aberto | 10,00 |
| Crivo | 0,75 | Saída de tubulação | 1,00 |
| Curva de 90° | 0,40 | Tê, com passagem direta | 0,60 |
| Curva de 45° | 0,20 | Tê, com saída de lado | 1,30 |
| Curva de 22,5° | 0,10 | Tê, com saída bilateral | 1,80 |
| Entrada normal em canalização | 0,50 | Válvula de pé | 1,75 |
| Entrada de borda | 1,00 | Válvula de retenção | 2,50 |
| Existência de pequena derivação | 0,03 | Velocidade | 1,00 |

* Com base na velocidade maior (seção menor)

** Relativa à velocidade na tubulação

Fonte: Azevedo Netto

Exemplo: Na instalação da figura todos os tubos tem diâmetro $D = 15\,\text{cm}$. O comprimento de todos os trechos retos é $L = 48\,\text{m}$. A rugosidade interna dos condutos é $\varepsilon = 0{,}15\,\text{mm}$. O fluido é água de propriedades $\nu = 10^{-6}\,\text{m}^2/\text{s}$, $\gamma = 10000\,\text{N/m}^3$. A vazão é $Q = 0{,}040\,\text{m}^3/\text{s}$. Calcule a carga manométrica $Hm$ da bomba. Considere $g = 10\,\text{m/s}^2$.



Da equação da energia:

$$\left(\alpha_2 \frac{V_2^{\ 2}}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2\right) - \left(\alpha_1 \frac{V_1^{\ 2}}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1\right) = Hm - \text{perdas}$$

Como os reservatórios (1) e (2) são de grandes dimensões, vamos considerar $V_1 \cong 0$ e $V_2 \cong 0$. O reservatório (1) está na atmosfera e o reservatório (2) tem uma pressão efetiva $p = 500\text{kPa}$. O desnível entre os reservatórios é de 10m. Tomando a origem do eixo $z$ na superfície do reservatório (1):

$$\left(\underbrace{\alpha_2 \frac{V_2^{\ 2}}{2g}}_{0} + \underbrace{\frac{p_2}{\gamma}}_{\frac{500000}{10000}} + \underbrace{z_2}_{10}\right) - \left(\underbrace{\alpha_1 \frac{V_1^{\ 2}}{2g}}_{0} + \underbrace{\frac{p_1}{\gamma}}_{0} + \underbrace{z_1}_{0}\right) = Hm - \text{perdas}$$

Resulta:

$$Hm = 60 + \text{perdas}$$

As perdas são dadas pela perda distribuída e pelas perdas singulares. Como o diâmetro é constante, a velocidade não varia nas tubulações, assim:

$$\text{perdas} = f\,\frac{L}{D_H}\,\frac{V^2}{2g} + \sum K_s\,\frac{V^2}{2g}$$

A velocidade é $V = \dfrac{Q}{S} = \dfrac{4Q}{\pi D^2} = \dfrac{4.0{,}040}{\pi .0{,}15^2} = 2{,}26\,\text{m/s}$

O diâmetro hidráulico é o próprio diâmetro da tubulação: $D_H = D = 0{,}15\text{m}$

Temos $\mathrm{Re} = \dfrac{V D_H}{\nu} = \dfrac{2{,}26.0{,}15}{10^{-6}} = 3{,}4\times10^5$ e $\dfrac{\varepsilon}{D_H} = \dfrac{0{,}15\times10^{-3}}{0{,}15} = 0{,}001$

Com esses dados, da equação de Haaland:

$f = 0{,}0204$

Assim:

$$\text{perdas} = \left[0{,}0204\frac{48}{0{,}15} + (0{,}5 + 0{,}9 + 10 + 0{,}9 + 1)\right]\frac{2{,}26^2}{2.10} = 5{,}06 \text{ m}$$

Logo, a carga manométrica da bomba fica:

$$Hm = 60 + 5{,}06 \;\Rightarrow\; \boxed{Hm = 65{,}06\,\mathrm{m}}$$

**Bibliografia:**

Bistafa, S.R., “Mecânica dos Fluidos, Noções e Aplicações”, 2ª Edição, Ed. Blucher, 2016.

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 5º edição, Ed. McGraw Hill, 2010.

Potter, M.C.; Wiggert, D.C., “Mecânica dos Fluidos”, Ed. Thomson Learning, 2004.