

2020-2, "FISMAT-AV", AULA 27

OBJETIVOS: DISCUTIR CONCEITOS

BÁSICOS DE AMOSTRAGEM E FILTRAÇÃO NA TEORIA DE TFS, ENTRE OUTROS CASOS ESPECIAIS

3.7 PERIODICIDADE, PARIDADE

* TF DE UMA FUNÇÃO PERIÓDICA

O MAIS SIMPLES SERIA CALCULAR

A SÉRIE DE FOURIER PERTINENTE, QUE ÀS VEZES É DENOMINADA TF FINITA OU, DEPENDENDO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO, TRANSFORMADA FINITA DE SENOS OU COSSENOS.

PORÉM, SE QUEREMOS REALMENTE UMA TF (NÃO FINITA...), USEMOS A REPRESENTAÇÃO

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-iK_n x}, \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(x) e^{+iK_n x} dx$$

$K_n = n\pi/L$

PARA CALCULARMOS

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx =$$
$$= \sqrt{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-K_n)x} dx \right]$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(k - K_n)}$$

"TREM DE PULSOS DELTA NOS HARMÔNICOS"

* TF DE FUNÇÃO PAR/ÍMPAR

$$\text{SE } f(-t) = f(t),$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] dt$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt.$$

ALGUNS AUTORES DEFINEM DIRETAMENTE
A TF DE COSSENOS COMO

$$\tilde{f}_c(\omega) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt.$$

SÓ É ÚTIL PI E PAR...

OU NÃO?

102

COMO $\tilde{f}_c(-\omega) = \tilde{f}_c(\omega)$, TAMBÉM VALE

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}_c(\omega) \cos(\omega t) d\omega,$$

MAS O MAIS IMPORTANTE É PERCEBER

SE f DEFINIDA ORIGINALMENTE APENAS
EM $(0, \infty)$ PODE SER ESTENDIDA A $(-\infty, +\infty)$

E TER "TRATAMENTO SIMPLES" COM $\tilde{f}_c(\omega)$.
COMO PAR!!!

ANALOGAMENTE, SE $f(-t) = -f(t)$,

A TF DE SENOS COMPORTA-SE COMO

$$\begin{cases} \tilde{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \\ f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}_s(\omega) \sin(\omega t) d\omega \end{cases},$$

HAJA VISTA QUE $\tilde{f}_s(-\omega) = -\tilde{f}_s(\omega)$. FINAL-

MENTE, COMO $\equiv f_p(x)$ $\equiv f_I(x)$

$$f(x) = \left\{ \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)] \right\},$$

É CLARO QUE $\tilde{f}(k) = \widetilde{(f_p)}_c(k) + i \widetilde{(f_I)}_s(k)$.

3.8 INFORMAÇÃO INCOMPLETA SOBRE UM SINAL

EM DIVERSAS CONDIÇÕES EXPERIMENTAIS, DESEJA-SE CARACTERIZAR UM SINAL CONTÍNUO $f(t)$. PORÉM, A RESOLUÇÃO TEMPORAL DO EXPERIMENTO/APARATO SÓ PERMITE A COLETA DE UMA SEQUÊNCIA DISCRETA DE MEDIDAS, $f(t_1), f(t_2), \dots$. VEREMOS QUE, SOB CERTAS CONDIÇÕES, PODEREMOS OBTER $f(t)$ E ESTIMAR $\tilde{f}(\omega)$!!!

* TEOREMA DE AMOSTRAGEM

SUPONHA QUE O SINAL $f(t)$ TENHA LIMITAÇÃO DE BANDA: $\tilde{f}(\omega) = 0$ SE $\omega \notin [-\Omega, +\Omega]$. A FREQUÊNCIA MÁXIMA Ω DETERMINA UMA ESCALA DE TEMPO Ω^{-1} , DE MODO QUE $f(t + \Delta t)$ E $f(t)$

SÃO BEM PRÓXIMOS ENTRE SI SE $\Delta t \ll \Omega^{-1}$. OU SEJA, PARA Δt "PEQUENO", "DÁ PARA SENTIR QUALQUER VARIAÇÃO DE f ". ← INTUIÇÃO FÍSICA!

TEOREMA: SE $f \in L^2(\mathbb{R})$ E $\tilde{f}(\omega) = 0$ QUANDO $|\omega| \geq \Omega$ (DE MODO QUE $\tilde{f} \in L^1 \cap L^2$), f É COMPLETAMENTE DETERMINADA POR SEUS VALORES EM $t_n = \frac{n\pi}{\Omega}$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t_n) \frac{\sin[\Omega(t-t_n)]}{\Omega(t-t_n)}.$$

ANTES DA DEMONSTRAÇÃO, SÃO PERTINENTES VÁRIOS COMENTÁRIOS; MATEMÁTICOS E FÍSICOS.

HÁ DOIS ASPECTOS MATEMÁTICOS DIGNOS DE NOTA. PRIMEIRO, NOTE QUE OBTIVEMOS UMA BASE, $\left\{ \frac{\sin[\Omega(t-t_n)]}{\Omega(t-t_n)} \right\}$, PARA

UM ESPECÍFICO ESPAÇO DE FUNÇÕES, O DAS FUNÇÕES QUADRADO-INTEGRÁVEIS.

VEIS CUJA TF TEM SUPORTE COMPACTO $[-\Omega, +\Omega]$. SEGUNDO, OBTIVEMOS UMA CONVOLUÇÃO DISCRETA, DA FUNÇÃO "ARBITRÁRIA" f COM O FILTRO $\frac{\sin \Omega t}{\Omega t}$. APE-

SAR DE ADAPTAÇÕES AO CASO DISCRETO SEREM NECESSÁRIAS, VALE UM TEOREMA DE CONVOLUÇÃO, DE MODO QUE A TRANSFORMADA DO FILTRO (QUE JÁ VIMOS SER UMA "JANELA" rect NO "MUNDO DE FOURIER") EFETIVA O CORTE DAS FREQUÊNCIAS DE ALTA MAGNITUDE EM f .

QUANTO AOS ASPECTOS FÍSICOS, PRIMEIRO, PARA EVITAR DISTORÇÕES DO SINAL, A TAXA ANGULAR DE AMOSTRAGEM ω_s DEVE SER MAIOR OU IGUAL A $\frac{2\pi}{\Delta t_n} = \frac{2\pi}{\pi/\Omega} = 2\Omega$. EM TERMOS DE AMOSTRAGEM

POR UNIDADE DE TEMPO (NÃO ANGULAR), A FREQUÊNCIA DE AMOSTRAGEM f_s VEM

$$\text{DE } \omega_s \geq 2\Omega \Rightarrow 2\pi f_s \geq 2 \cdot (2\pi F) \Rightarrow f_s \geq \boxed{2F}.$$

TAXA DE NYQUIST

ALMEJADO! **DADO!**

DOBRADO DA FREQUÊNCIA (NÃO ANGULAR!) MÁXIMA

POR OUTRO LADO, SE UM APARATO / EXPERIMENTO (POR UMA TAXA DE AQUISIÇÃO) / (RESOLUÇÃO TEMPORAL) / (FREQUÊNCIA DE AMOSTRAGEM) $\hat{f}_s$, O TEOREMA DE AMOSTRAGEM INDICA A MÁXIMA FREQUÊNCIA $\hat{F}$ QUE PODE SER EXTRAÍDA DO SINAL,

$$\hat{F} \leq \boxed{\frac{\hat{f}_s}{2}}.$$

FREQUÊNCIA DE NYQUIST

DADO **CONSEQUÊNCIA!**

□ DEMONSTRAÇÃO: A EXTENSÃO PERIÓDICA DE $\tilde{f}(\omega)$ DE $[-\Omega, +\Omega]$ A IR EM SÉRIE DE FOURIER É

$$\tilde{f}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_n e^{i\omega t_n},$$

(1)

COM COEFICIENTES

$$\tilde{f}_n = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{+\Omega} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t_n} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t_n} d\omega =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} f(t_n) \quad (2)$$

(2) EM (1), PARA INVERTER $\tilde{f}(\omega)$ A $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{+\Omega} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} f(t_n) e^{i\omega t_n} \right] e^{-i\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\Omega} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t_n) \left[\int_{-\Omega}^{+\Omega} e^{-i\omega(t-t_n)} d\omega \right] =$$

$$= \frac{1}{2\Omega} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t_n) \left[\frac{e^{-i\omega(t-t_n)}}{-i(t-t_n)} \right]_{-\Omega}^{+\Omega} =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t_n) \frac{1}{\Omega(t-t_n)} \cdot \frac{e^{+i\Omega(t-t_n)} - e^{-i\Omega(t-t_n)}}{2i}$$

$$\therefore f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t_n) \frac{\sin[\Omega(t-t_n)]}{\Omega(t-t_n)} \quad \text{Q.E.D.}$$

□

08

APÊNDICE: TRANSFORMADA z

- DADAS DUAS SEQUÊNCIAS $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ E $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, SUA CONVOLUÇÃO É A SEQUÊNCIA $((a * b)_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ONDE

$$(a * b)_k \equiv \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \cdot b_{k-l}.$$

- A TRANSFORMADA z (DISCRETA) DE $(a_n) \in \bar{\mathbb{C}}$

$$\Psi_a(z) \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot z^n.$$

- CONVOLUÇÃO:

$$\Psi_{a * b}(z) = \Psi_a(z) \cdot \Psi_b(z)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{a * b}(z) &= \sum_k (a * b)_k \cdot z^k \\ &= \sum_k \left(\sum_l a_l \cdot b_{k-l} \right) \cdot z^k \\ &= \sum_l a_l \cdot z^l \left(\sum_k b_{k-l} \cdot z^{k-l} \right) \\ &= \sum_l a_l \cdot z^l \left[\sum_j b_j z^j \right] = \left[\sum_l a_l z^l \right] \cdot \left[\sum_j b_j z^j \right] \end{aligned}$$