MAP 2321 - Técnicas em Teoria de Controle

Sistemas lineares de controle
Controlabilidade[1]

Depto. Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
São Paulo – SP

[1] K. Ogata [Seção 9.6]. J. Baumeister e A. Leitão [Capítulo 3]. R. Brockett [Seção 13].

Nas aulas que se seguem **pretendemos** discutir os conceitos de controlabilidade e observabilidade de sistemas de controle lineares da forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D(t)\,u(t) \end{cases} \qquad (*)$$

onde $x(t)$ é um vetor de **estado** $n \times 1$; $u(t)$ vetor de **controle** $r \times 1$; $y(t)$ vetor de **saída** $m \times 1$; $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $D(t) \in \mathbb{R}^{m\times r}$ **constantes**.

- Inicialmente trataremos controlabilidade de **estado** assumindo A e B constantes.[2]
- Em **seguida** veremos controlabilidade de saída e assim do sistema de controle.
- Posteriormente veremos **observabilidade**.

[2]Note que aqui estamos trabalhando com matrizes constantes. Posteriormente veremos o caso mais geral contínuo no tempo t.

Controlabilidade

- Dizemos que o sistema $(*)$ é **controlável** em $[t_0, t_1]$, se for possível, por meio de um **vetor** de controle admissível u, transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ para qualquer outro estado $x(t_1) \in \mathbb{R}^n$.
- Se o sistema de estado for controlável para **todo** intervalo finito $[t_0, t_1]$, dizemos que o sistema é **completamente** controlável.

Observabilidade

Dizemos que um sistema é **observável** no instante t_0, se for possível determinar o estado inicial $x(t_0)$ a partir da observação da **saída** também durante um intervalo de tempo finito $[t_0, t_1]$.

Tais conceitos foram introduzidos por **Kalman** e tem um papel importante no projeto de sistemas. De fato, a controlabilidade e observabilidade de um sistema podem ditar a existência de uma solução **completa** para o projeto validando sua execução.

Controlabilidade completa de estado

Inicialmente consideramos o seguinte sistema de **estado**

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado; $u(t) \in \mathbb{R}$ **sinal** de controle (escalar); $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ matrizes **constantes**.

- Tal sistema de estado controlável em $[t_0, t_1]$ se for possível **construir** um sinal de **controle** u que transfira o sistema de um estado inicial $x(t_0)$ para qualquer estado final $x(t_1)$ no intervalo de tempo $t_0 \leq t \leq t_1$.
- Veremos que em sistemas **autônomos** como este (quando as matrizes A e B são constantes), os conceitos de controlável e completamente controlável são **equivalentes**.

Controlabilidade completa de estado

Teorema

O sistema de **estado**

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

com $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ matrizes constantes é **controlável**, se e somente se, o **posto** da matriz $n \times n$

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

é n. Assim, o sistema de estado é controlável se e só se é **completamente** controlável.

- Lembramos que *posto* de uma matriz corresponde ao **número** de linhas ou colunas **linearmente** independentes dela. Nesse caso particular, como se trata de uma matriz $n \times n$, posto igual a n é equivalente a determinante **não** nulo.
- Veja que aqui o controle é realizado por uma função **escalar** vezes uma matriz coluna B de tamanho $n \times 1$.
- Note que a **condição** de controlabilidade não depende do intervalo $[t_0, t_1]$. Por isso podemos concluir que os conceitos de controlabilidade e controlabilidade completa neste caso são **equivalentes**.

1. Segunda lei de Newton

Seja $x(t)$ a **posição** de um corpo num instante t sujeito a um **força** f. Se o corpo possui massa m, então temos

$$m\ddot{x}(t) = f(t)$$

- x é a **saída** do sistema e f pode ser visto como **controle**. Se $x_1(t) = x(t)$ e $x_2(t) = \dot{x}(t)$ obtemos o seguinte sistema de controle

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} f.$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Possui este problema um sistema de estado completamente **controlável**?

Pelo **teorema** sabemos que o sistema de estado será completamente controlável se e somente se o **posto** da matriz 2×2

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = [B \quad AB]$$

é 2. De fato, **como**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

temos que

$$\begin{aligned} [B \quad AB] &= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

é uma **matriz** de posto 2 o que implica na **controlabilidade** do sistema.

2. Um sistema não controlável

Veremos que o **sistema** abaixo não é completamente controlável. Seja

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

Nesse caso temos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

daí

$$\begin{aligned} [B \quad AB] &= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que é uma matriz **singular** e portanto não possui posto igual a 2. Logo, concluímos que o sistema não é controlável.

3. Oscilador harmônico

Considere o **sistema mecânico** indicado ao lado. A equação do sistema é $m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$ onde m é a **massa** do corpo, b o **amortecimento** e k a **constante elástica**. y é a saída e u a entrada (controle).

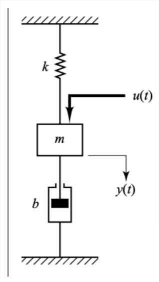


Figura: Massa mola amortecido.

Definindo as variáveis de **estado** $x_1(t) = y(t)$ e $x_2(t) = \dot{y}(t)$ obtemos que

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Aqui temos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

Logo

$$\begin{aligned} [B \quad AB] &= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & -\frac{b}{m^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

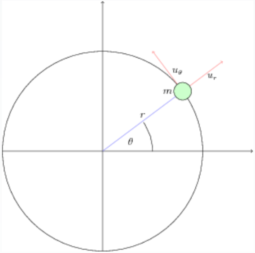
que é uma matriz **não** singular já que $\det [B \quad AB] = -1/m^2 \neq 0$. Então a matriz possui posto 2 o que garante que o sistema é **completamente** controlável.

- Note que o **parâmetro** de amortecimento b não interfere na controlabilidade do sistema de **estado**.

4. Um satélite simples

Uma **partícula** de massa unitária está sob ação de um campo de aceleração **central** newtoniano. Além disso temos dois controles independentes, um na direção **radial** e outro na direção **tangencial** $u_r e_r$ e $u_\theta e_\theta$ respectivamente.[a]

[a] $e_r, e_\theta \subset \mathbb{R}^2$ formam um referencial móvel unitário.



a) Pela Segunda **Lei** de Newton obtemos o seguinte modelo para este sistema

$$\ddot{\mathbf{r}} = (-k/r^2 + u_r)e_r + u_\theta e_\theta$$

b) Em coordenadas **polares** o re-escrevemos da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - k/r^2 + u_r \\ r\ddot{\theta} &= -2\dot{r}\dot{\theta} + u_\theta \end{aligned} \tag{1}$$

c) Suponha $u_r = u_\theta = 0$. **Então**, se $k = \sigma^3\omega^2$, as órbitas **circulares** $r(t) = \sigma$ e $\theta(t) = \omega t$ são soluções do sistema (1).

d) Além disso, se tomamos como variáveis de **estado**

$$x_1 = r - \sigma, \quad x_2 = \dot{r}, \quad x_3 = \sigma(\theta - \omega t) \quad \text{e} \quad x_4 = \sigma(\dot{\theta} - \omega)$$

obtemos a seguinte equação **linearizada** de (1) sobre as órbitas circulares

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

se tomamos $\sigma = 1$.

Resultados mais gerais são necessários

Note que o teorema enunciado **não se aplica** diretamente a este caso pois a matriz **associada** ao controle não é um vetor coluna $n \times 1$ por um escalar. Temos o produto de uma matriz 4×2 por uma 2×1 onde não verifica as **condições** do teorema.

Analisemos então a ação de apenas **um** controle tomando o outro identicamente nulo.

1. Primeiro assumimos $u_2 \equiv 0$ acrescentando controle na direção **radial**. Assim

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Em seguida assumimos $u_1 \equiv 0$ agindo apenas na direção **tangencial**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$u_2 \equiv 0$ Sabemos que o sistema será **controlável** se e só se o **posto** da matriz 4×4

$$\begin{bmatrix} B_1 & AB_1 & \dots & A^{n-1}B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & AB_1 & A^2B_1 & A^3B_1 \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad 4.$$

Veja que

$$\begin{aligned}
AB_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2\omega \end{pmatrix} \\
A^2B_1 &= A(AB_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 \\ -2\omega \\ 0 \end{pmatrix} \\
A^3B_1 &= A(A^2B_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 \\ -2\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ 2\omega^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} B_1 & AB_1 & A^2B_1 & A^3B_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \end{pmatrix}.$$

Agora

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega^2 \\ 0 & -2\omega & 0 \\ -2\omega & 0 & 2\omega^3 \end{pmatrix}$$
$$= (-1)(-4\omega^4 + 4\omega^4) = 0.$$

- ⋆ Portanto, obtemos que a matriz $\begin{bmatrix} B_1 & AB_1 & A^2B_1 & A^3B_1 \end{bmatrix}$ é **singular** e portanto **não** possui posto 4 implicando que o sistema de estado **não** é completamente controlável se **tomamos** $u_2 \equiv 0$.

$u_1 \equiv 0$ Temos que verificar se o **posto** da matriz 4×4

$$\begin{bmatrix} B_2 & AB_2 & \dots & A^3B_2 \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad 4.$$

$$\begin{aligned}
AB_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
A^2B_2 &= A(AB_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\omega \\ 0 \\ 0 \\ -4\omega^2 \end{pmatrix} \\
A^3B_2 &= A(A^2B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\omega \\ 0 \\ 0 \\ -4\omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\omega^3 \\ -4\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} B_2 & AB_2 & \dots & A^3B_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{1+4} \det \begin{pmatrix} 0 & 2\omega & 0 \\ 2\omega & 0 & -2\omega^3 \\ 1 & 0 & -4\omega^2 \end{pmatrix}$$
$$= (-1)(16\omega^4 - 4\omega^4) = -12\omega^4.$$

- ⋆ Nesse caso, **se** temos $\omega \neq 0$, obtemos que a matriz $\begin{bmatrix} B_2 & AB_2 & \dots & A^3B_2 \end{bmatrix}$ é **não singular**, e portanto de posto 4, implicando que o sistema de estado é completamente **controlável** mesmo tomando $u_1 \equiv 0$.
- ⋆ Desta forma, concluímos que a **perda** de impulso radial não implica na perda de controlabilidade, enquanto que a perda de impulso tangencial **sim**.