

FÍSICA II – 2020

MÓDULO IV – INTRODUÇÃO À MECÂNICA DE FLUIDOS

AULA 19 – Eq. de Bernoulli, escoamento rotacional e irrotacional, efeito Magnus, vórtices.

Da aula 18: Equação de movimento (Euler) para fluido ideal, $\eta=0$
incompressível, sujeito a forças volumétricas conservativas
 $\rho = \text{const.}$ $\hookrightarrow \vec{f}_v = -\vec{\nabla} u$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \frac{\vec{\nabla} u}{\rho} \\ (2) \quad & \vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} \\ (3) \quad & 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

- (1) Equação de movimento, $\vec{v} \equiv \vec{v}(\vec{r}, t)$ campo de velocidades (Euler)
 (2) Definição de $\vec{\Omega}(\vec{r}, t)$ (vorticidade)
 (3) Equação de continuidade (conservação de massa), $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ no caso de fluido incompressível ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$)

Consequências dessas equações

(A) $\vec{\nabla} \times (\text{Eq}(1)) \rightarrow \boxed{\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0}$ (porque $\vec{\nabla} \times \text{gradiente} \equiv 0$)

(B) Para $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ (escoamento estacionário, $\vec{v}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{v}(\vec{r})$)

$\downarrow$
 $\boxed{\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \frac{u}{\rho} \right) = 0}$

Eq. de Bernoulli. Ao longo de uma linha de escoamento, $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \frac{u}{\rho} = \text{constante}$

* É claro que essas equações valem pelo que são capazes de dizer sobre o movimento do fluido (nas condições suportadas!).
(Presumivelmente TUDO!)

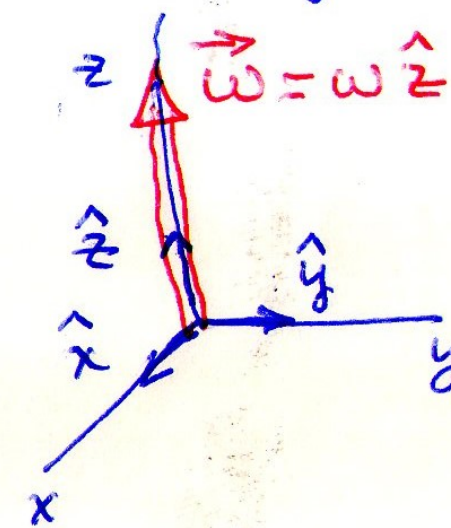
* COMO elas fazem isso?

Um primeiro passo para perceber isso: obtenção de soluções em alguns casos muito simples.

Caso 1 - Campo de velocidades inicial $\vec{v}(\vec{r}, 0) = \vec{\omega} \times \vec{r} \equiv -\omega y \hat{x} + \omega x \hat{y}$

* fluido em "rotação rígida".

* já estudado como problema estático (no referencial girante), com "potencial centrífugo" $u_{\omega} = -\frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2$



↓
Resultado: superfícies isobáricas são paraboloides de revolução:

$$z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

Proposta para agora: tratar esse caso dinamicamente, no referencial fixo.

Caso 1 - Condição inicial $\vec{v}(\vec{r}, 0) = \vec{v}(x, y, z, 0) = -\omega y \hat{x} + \omega x \hat{y}$

Permite calcular a vorticidade inicial:

$$\vec{\Omega}(\vec{r}, 0) = \nabla \times \vec{v}(\vec{r}, 0) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial(\omega x)}{\partial x} \hat{z} - \left(\frac{\partial(-\omega y)}{\partial y} \right) \hat{z} = 2\omega \hat{z}$$

não depende da posição!
não irrotacional!

* Da consequência (A), $\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0$

se pode obter como $\vec{\Omega}$ depende do tempo:

$$\vec{\Omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 2\omega \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = -2\omega^2 x \hat{x} - 2\omega^2 y \hat{y}; \quad \nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = -2\omega^2 \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}$$

$$\text{Logo } \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = 0 \rightarrow \vec{\Omega}(\vec{r}, t) = \vec{\Omega}(\vec{r}) = 2\omega \hat{z}$$

* A definição de $\vec{\Omega}$ é então consistente com um escoamento estacionário, $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}) = -\omega y \hat{x} + \omega x \hat{y}$

* Nessas condições, a equação de Euler (1) dá, supondo $u(\vec{r}) = p g z$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} - g \hat{z}$$

$$0 \quad \quad \quad -2\omega^2 \vec{r} + \omega^2 \vec{r} = -\frac{\nabla p}{\rho} - g \hat{z}$$

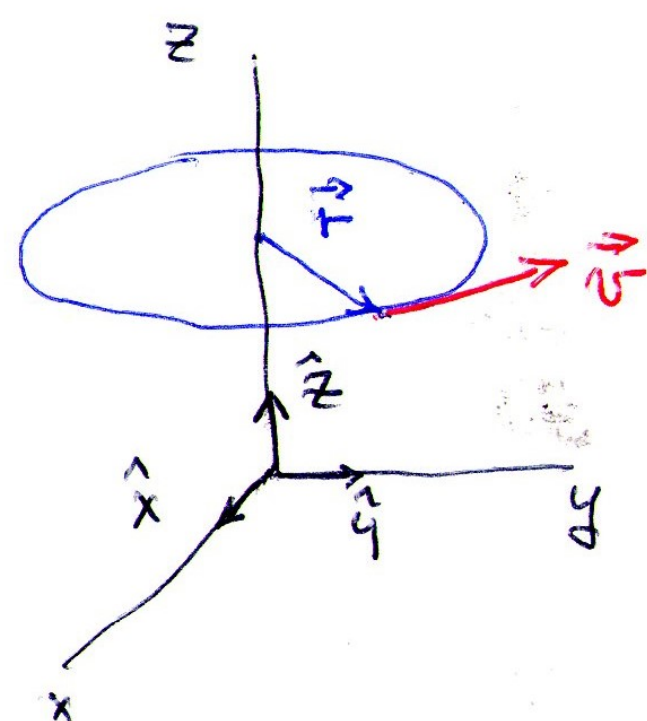
$$\frac{\nabla p}{\rho} = \omega^2 \vec{r} - g \hat{z} = \omega^2 (x \hat{x} + y \hat{y}) - g \hat{z} \Rightarrow p = \omega^2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) - g z \quad (\text{escalar})$$

Forma da superfície isobárica:

$$g z = \text{constante} + \omega^2 \frac{r^2}{2} \rightarrow z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

Caso 2 - Campo de velocidades inicial

$$\boxed{\vec{v}(\vec{r}, 0) = \frac{c}{2\pi} \frac{\hat{z} \times \vec{r}}{r^2} = \frac{c}{2\pi} \frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{x^2 + y^2}} \quad (\vec{r} \equiv x\hat{x} + y\hat{y})$$



* $|\vec{v}|$ cresce como $\frac{1}{r}$ quando r diminui

[Partícula de massa m com essa velocidade:
momento angular $\vec{r} \times m\vec{v}(\vec{r}) = \frac{mc}{2\pi} \hat{z}$]

constante (indep. de r !)

Vorticidade inicial neste caso: $\boxed{\vec{\Omega}(x, y, z, 0) = \vec{\nabla} \times \vec{v}(x, y, z, 0) =}$

$$= \frac{c}{2\pi} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{c}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{(-y)}{x^2+y^2} \right) \hat{z} =$$

$$= \frac{c}{2\pi} \frac{x^2 - y^2 - x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \hat{z} = \boxed{0}$$

escoamento irrotacional!
(m'de potencial!)

Resulta então da equação (A) $\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0$

que $\boxed{\vec{\Omega}(\vec{r}, t) = 0}$ para todo t .

CASO 2 - continuação

* O caráter irrotacional do escoamento é constante com um escoamento estacionário, $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}) = \frac{C}{2\pi} \frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{x^2 + y^2}$

* Nessas condições, a equação de Euler (1) dá, supondo $u(\vec{r}) = \rho g z$

$$\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \cancel{\vec{\Omega} \times \vec{v}} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - g \hat{z}$$

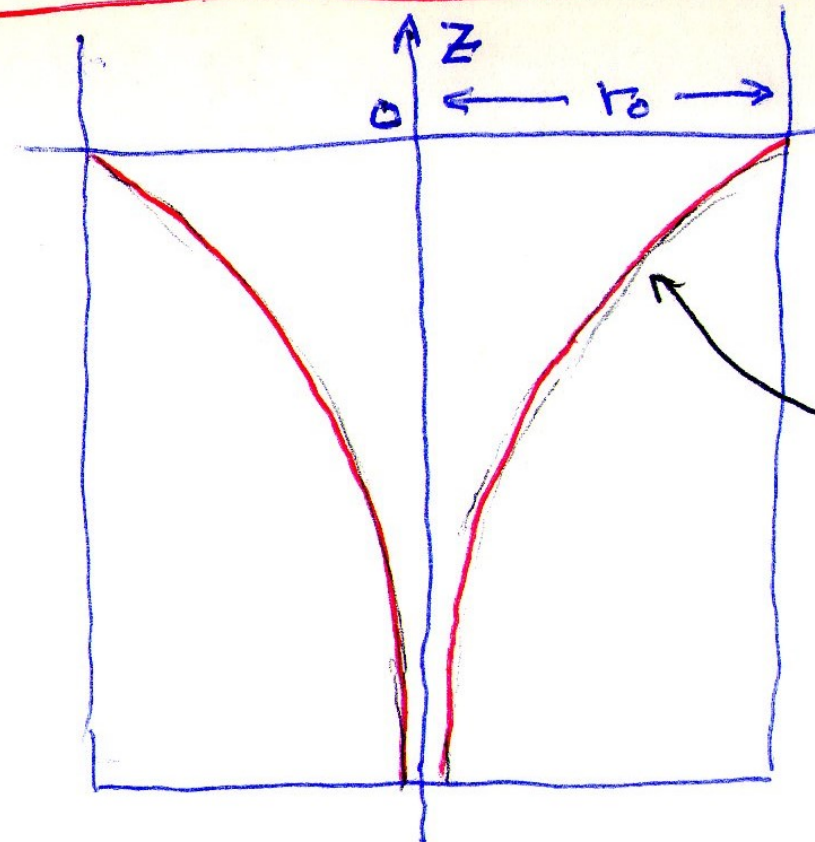
$$v^2 = \frac{C^2}{4\pi^2} \frac{1}{x^2 + y^2} ; \quad \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 = \frac{C^2}{4\pi^2} \frac{-x\hat{x} - y\hat{y}}{(x^2 + y^2)^2} \therefore$$

$$\boxed{\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = \frac{\frac{C^2}{4\pi^2} x\hat{x}}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\frac{C^2}{4\pi^2} y\hat{y}}{(x^2 + y^2)^2} - g\hat{z}}$$

$$\downarrow \quad \frac{1}{\rho} p = - \frac{C^2}{8\pi^2} \frac{1}{x^2 + y^2} - g z + \text{const}$$

$\underbrace{\frac{1}{x^2 + y^2}}_{\frac{1}{r^2}} ; \quad \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$

Forma da superfície isobárica:

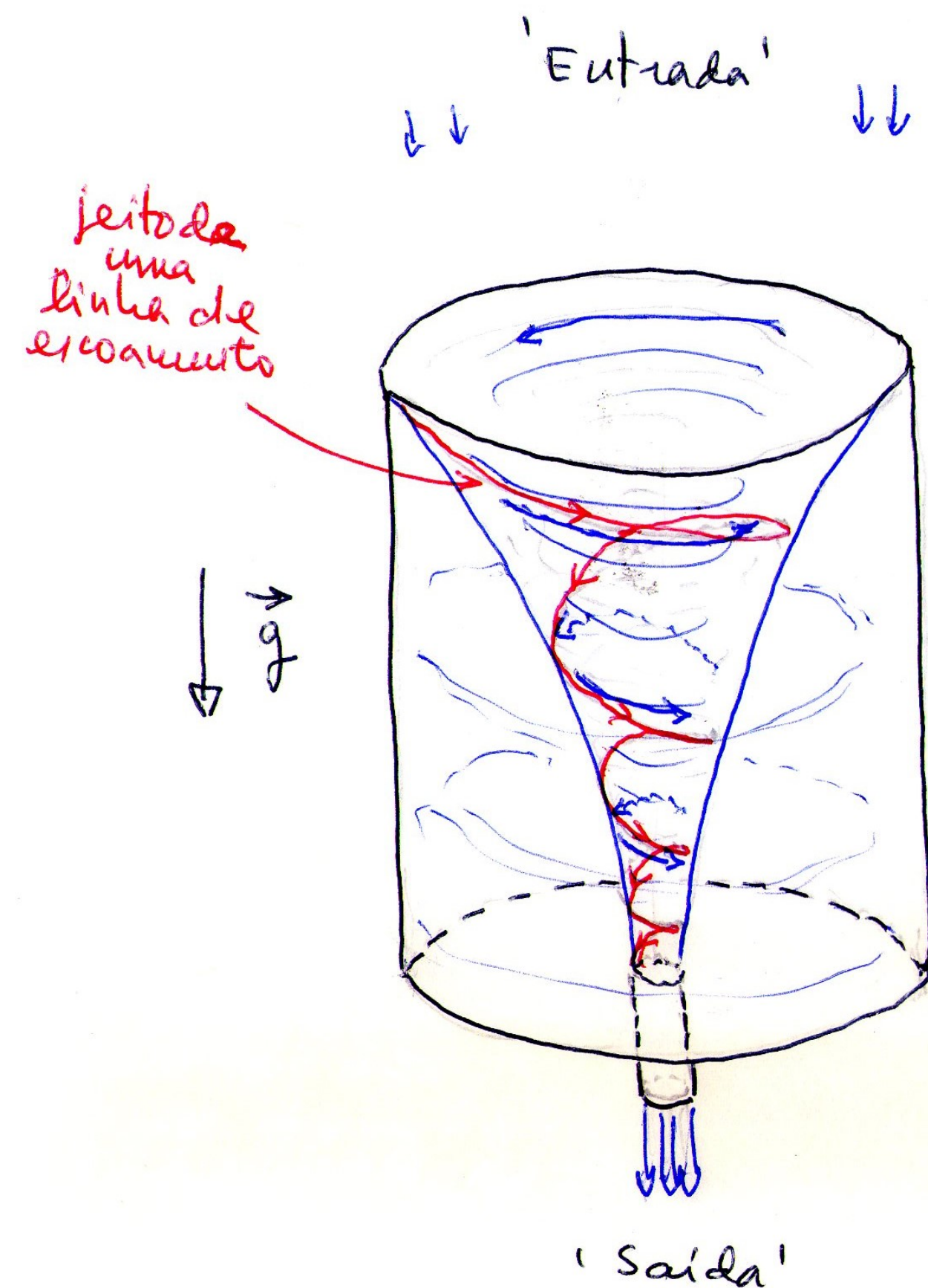


$$\boxed{\frac{C^2}{8\pi^2 g} \frac{1}{r^2} + z = \text{const.}}$$

$$\text{const} = + \frac{C^2}{8\pi^2 g} \frac{1}{r_0^2}$$

(Superfície de revolução com o perfil indicado).

Uma realização aproximada do caso 2. (Ou: o caso 2 é uma formalização aproximada desta situação)



- * O fluido está 'caindo' e sendo puxado para o meio do vórtice (posição da saída!) com forças portanto 'tipo centrais'.
- * Conservação de momento angular impõe aumento de velocidade proporcional a $\frac{1}{r}$ quando o raio r diminui
- * Há linhas de escoamento superficiais (pressão atmosférica p_0) com o jeito de 'espirais Arquimedianas' (Feynman). Ao longo delas vale a fórmula de Bernoulli, que (Lambert) leva a
$$z + \frac{K}{r^2} = \text{constante}$$

CASO 3 - (Uma costura dos casos 1 e 2)

$$\vec{v}(\vec{r}, 0) = \begin{cases} -\omega y \hat{x} + \omega x \hat{y} & \text{para } x^2 + y^2 \leq r_0^2 \\ \omega r_0^2 \frac{-y \hat{x} + x \hat{y}}{x^2 + y^2} & \text{para } x^2 + y^2 \geq r_0^2 \end{cases}$$

Vorticidade: $\vec{\Omega}(\vec{r}, 0) = \nabla \times \vec{v}(\vec{r}, 0) = \begin{cases} 2\omega \hat{z} & \text{para } x^2 + y^2 \leq r_0^2 \\ 0 & \text{para } x^2 + y^2 > r_0^2 \end{cases}$

(A): $\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = -\nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{v})$

$\nabla \times \vec{v} = \begin{cases} -2\omega^2 \vec{r}, & x^2 + y^2 \leq r_0^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > r_0^2 \end{cases}$

$\nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0$ (qualquer $x^2 + y^2$) $\Rightarrow \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = 0$

Consistente com escoamento estacionário,

$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, 0) = \vec{v}(\vec{r})$

Gradiente de pressão

$$-\frac{\nabla p}{\rho} = g \hat{z} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = g \hat{z} + \begin{cases} -2\omega^2 (x \hat{x} + y \hat{y}) & \text{para } x^2 + y^2 \leq r_0^2 \\ 0 & \text{para } x^2 + y^2 > r_0^2 \end{cases} + \begin{cases} \omega^2 (x \hat{x} + y \hat{y}), & x^2 + y^2 \leq r_0^2 \\ \omega^2 r_0^4 \frac{(x \hat{x} + y \hat{y})}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 > r_0^2 \end{cases}$$

$$= g \hat{z} + \begin{cases} -\omega^2 \vec{r} & \text{para } x^2 + y^2 \leq r_0^2 \\ -\omega^2 r_0^4 \frac{\vec{r}}{(x^2 + y^2)^2} & \text{para } x^2 + y^2 > r_0^2 \end{cases}$$

r^4

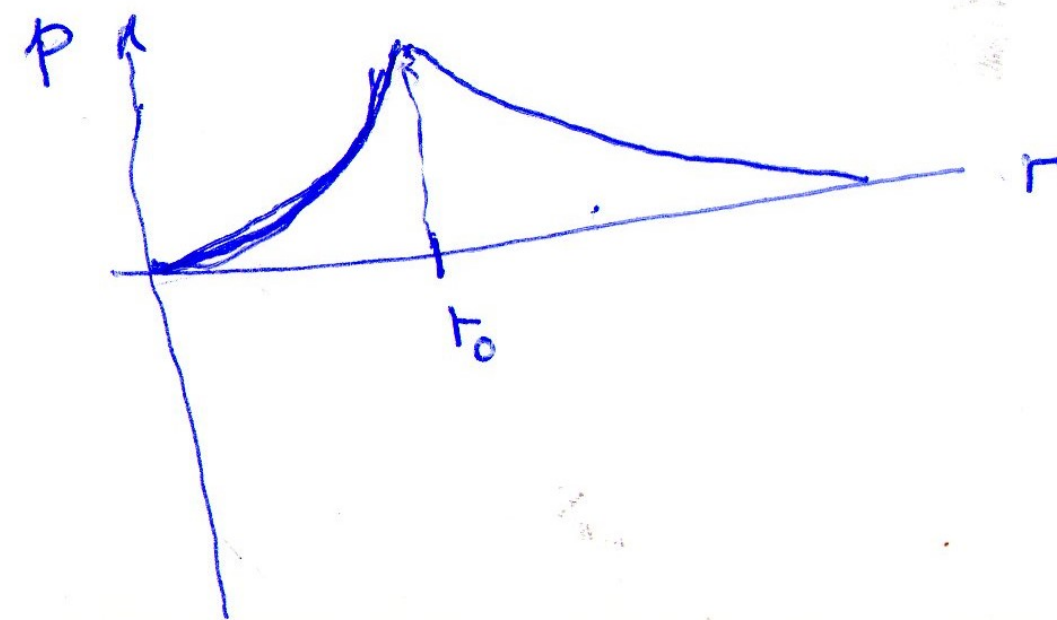
continuidade em $|\vec{r}| = r_0$!

CASO 3 - continuação

$$p = \left\{ \begin{array}{ll} \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} & \text{para } r \leq r_0 \\ \rho r_0^4 \omega^2 \frac{1}{2r^2} & \text{para } r > r_0 \end{array} \right\} - \rho g z + \text{const.}$$

$r^2 = x^2 + y^2$

Pressão a uma altura z fixa:



(V. Moukés 2, Figura 2-24: "modelo para um filete de vórtice retilíneo")

PAPEL E USO das equações (nos casos 1 e 2)

* O campo $\vec{v}(\vec{r}, t)$ (estacionário nos dois casos) é obtido a partir de (2), (3) e (A)

$$(1) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \frac{\vec{\nabla} u}{\rho}$$

$$(2) \vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

$$(3) 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

$$(A) \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0 \quad [\vec{\nabla} \times (1)]$$

* A equação (1) foi usada para obter a pressão (a partir do seu gradiente, $\vec{\nabla} p$).

Na realidade: ajustar as forças de pressão para garantir o escoamento estacionário pretendido!

Generalidade que há nisso: Um campo vetorial é especificado completamente dado o seu divergente $\vec{\nabla} \cdot$, (eq. (3)) e seu rotacional $\vec{\nabla} \times$, (eq. (2)), além de condições de contorno apropriadas.

* Nesse sentido, dado $\vec{\Omega}$, (2) e (3) determinam $\vec{v}$; (A) permite evoluir $\vec{\Omega}$ no tempo, e voltando às eqs. (2) e (3), evoluir $\vec{v}$ no tempo.

Caso em que $\vec{\Omega}(\vec{r}, t=0) = 0 \rightarrow$ por (A), $\vec{\Omega}(\vec{r}, t) = 0$ para todo t ;

$\vec{v}(\vec{r}, t)$ determinado por $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0}$ e $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0}$ (mais condições de contorno)

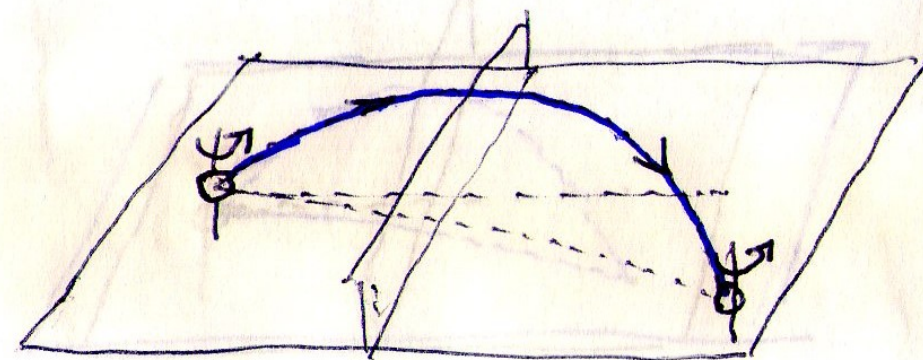
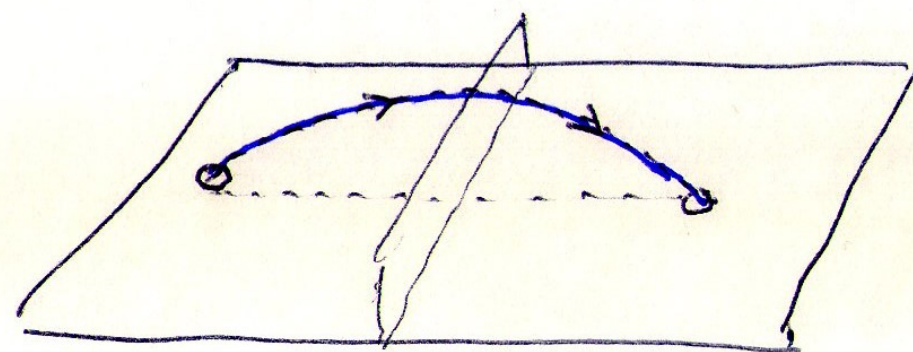
* Não linearidade $\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{2} \vec{v}^2$ de (1) implica em não superposição para a pressão

Equações lineares, vale superposição!

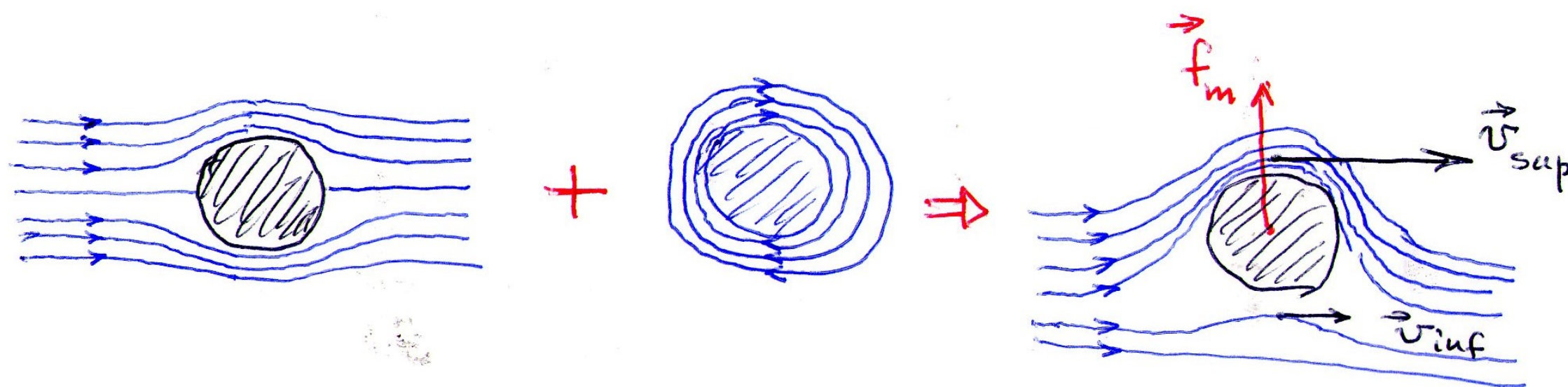
EFEITO MAGNUS

* Um objeto que se desloca no interior de um fluido sofre uma força que desvia lateralmente a trajetória quando ^{o objeto} está em rotação

desvio lateral
de uma bola
chutada "com
efeito"



CONTRAFAÇÃO do "Efeito Magnus" com superposição de escoamentos irrotacionais de fluidos ideais incompressíveis;



* Nesse esquema, força 'Magnus' $\vec{f}_m$ sobre o objeto resulta da equação de Bernoulli,

* Linhas de escoamento: duas, uma passando por cima outra por baixo do objeto.

* Pressão, muito antes (ou muito depois) do objeto:

pressão atmosférica p_0 ;

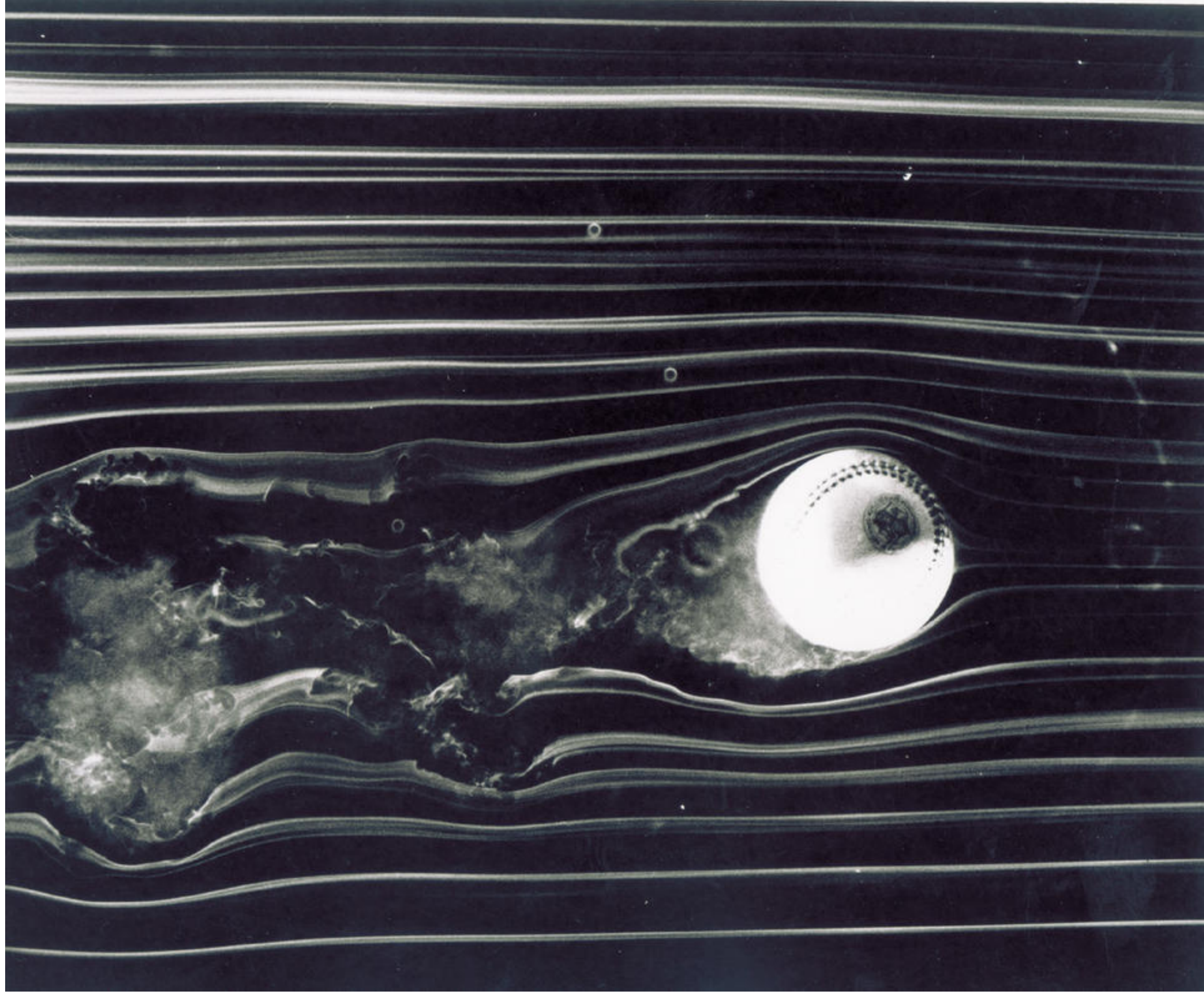
acima do objeto $<$ abaixo do objeto $\Rightarrow$
(velocidade acima) $>$ (velocidade abaixo)

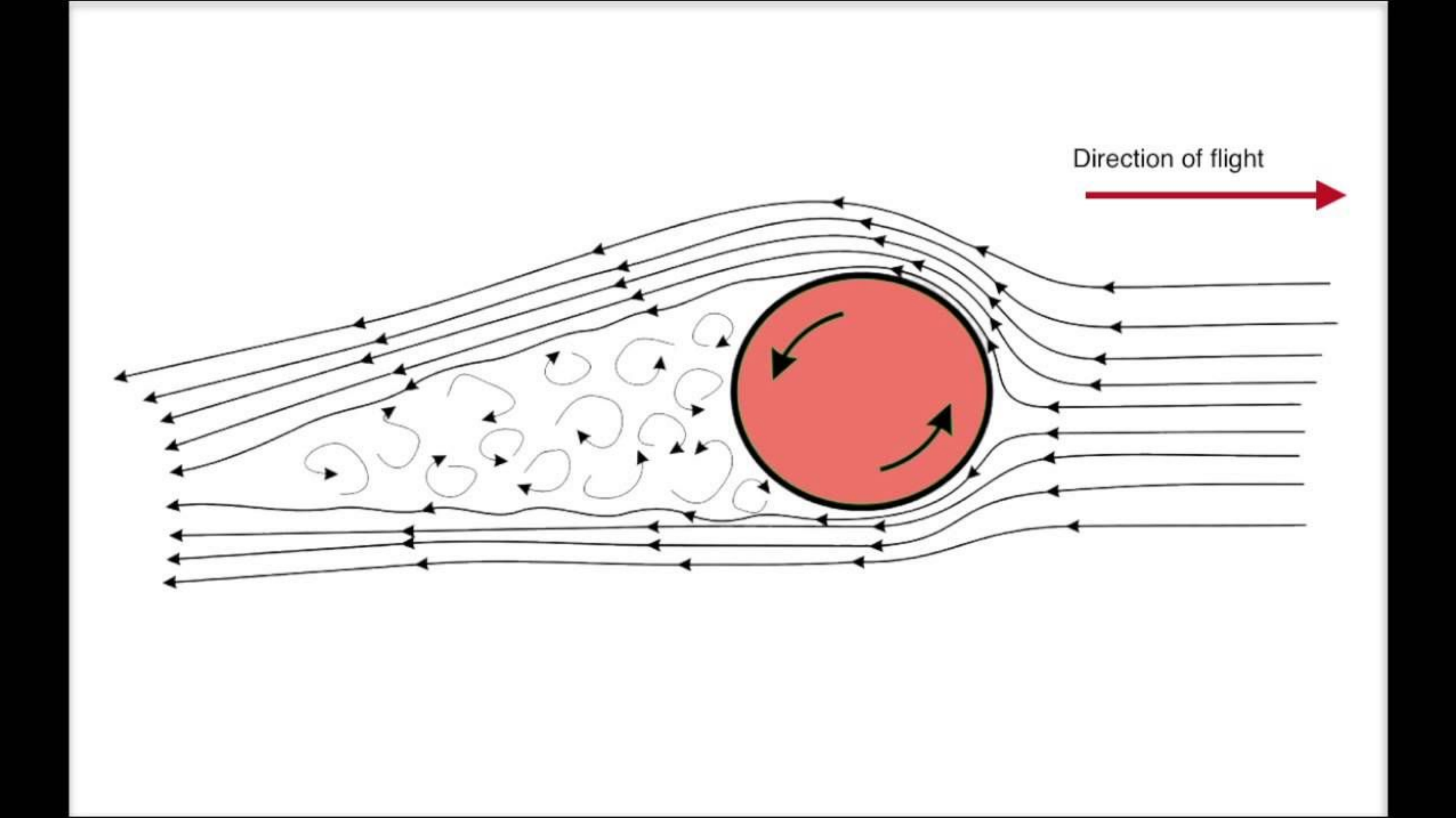
$\vec{f}_m$ para cima

Efeito da superposição
sobre a pressão contida

na eq. (1)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\vec{v} \cdot \nabla}_{\circ} \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{\nabla \omega}{\rho}$$





EFEITO MAGNUS real

* "Automatismo" da parte circulante do escoamento, graças à viscosidade

* Turbulência no escoamento em torno do objeto do fluido não ideal

* Contribuição da 3ª lei de Newton para o desvio através do redirecionamento do escoamento depois do objeto.

↓
ou: atrás

* E também, claro, alguma contribuição tipo Bernoulli.

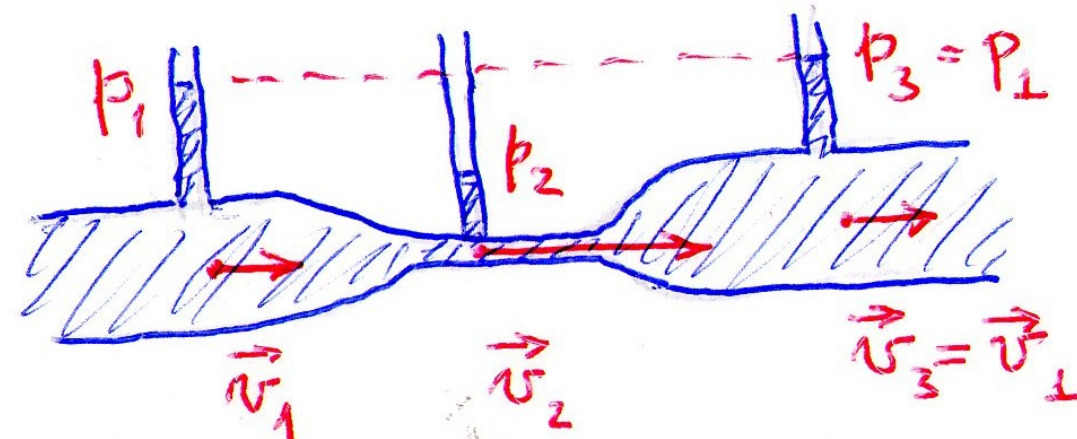
PROBLEMAS com a teoria até aqui:

→ que na realidade aparecem
fácil e numericamente!

- * Inaptidão para gerar vórtices (vorticidade)

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0$$

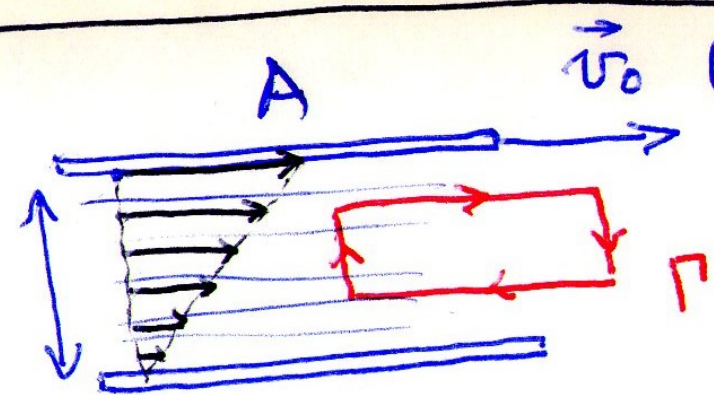
- * Ausência de efeitos dissipativos. Segundo a teoria,



Há forças de pressão apenas para acelerar ou retardar o fluxo, o fluido se desloca 'por si'.

As duas coisas podem ser consentadas introduzindo forças de viscosidade

e.g. vorticidade:



$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

← não
inrotacionalidade 'construída'
do escoamento viscoso.

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v_0}{d}$$